Serie 28:
Repetitionsserie

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Dimensionen der Eigenräume der folgenden Endomorphismen. Was lässt sich über die algebraische und geometrische Vielfachheit sagen?

a) $L_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $\dim(V) = 6$ und $T \in \mathrm{End}(V)$, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{16}, \dots, a_{66} \in \mathbb{R}$$

für eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V.

2. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$.

Bitte wenden!

3. **a)** Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $J \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus, sodass $J^2 = -\mathrm{id}_V$. Zeigen Sie, dass $(V, +)$ zusammen mit der skalaren Multiplikation

$$\mathbb{C} \times V \to V, (s + \mathbf{i}t, v) \mapsto sv + tJv$$

ein komplexer Vektorraum ist.

Bemerkung: Man nennt J eine *komplexe Struktur* auf V. Im Folgenden bezeichnen wir mit V^J den $\mathbb{C}$-Vektorraum V versehen mit der skalaren Multiplikation induziert durch J.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $V = \mathbb{R}^{2n}$. Zeigen Sie, dass V eine komplexe Struktur besitzt.

c) Sei (V, ω) ein endlichdimensionaler, symplektischer $\mathbb{R}$-Vektorraum (vgl. Serie 21). Sei $J \in \operatorname{End}(V)$ eine komplexe Struktur auf V. J heisst *kompatibel*, falls

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V$$

und

$$\omega(Ju, u) > 0 \quad \text{für alle } u \in V \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass die Folgenden äquivalent sind:

1. J ist kompatibel.
2. Die Bilinearform $\beta_J : V \times V \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \omega(Ju, v)$ ist symmetrisch, positiv definit und J-invariant.
3. Die Abbildung $\gamma_J : V^J \times V^J \to \mathbb{C}$, $(u, v) \mapsto \omega(Ju, v) - \mathbf{i}\omega(u, v)$ ist sesquilinear, hermitesch und hat positiv definiten Realteil.

d) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei ω_0 die durch $J_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ definierte symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2n}$ (vgl. Serie 21, Aufgabe 5). Zeigen Sie, dass eine mit $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ kompatible komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2n}$ existiert.

4. Sei V ein endlichdimensionaler, reeller Vektorraum.

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ invertierbar, dann existiert ein inneres Produkt auf V, sodass T orthogonal ist.

b) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ und sei $T = L_A$ für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Finden Sie entweder ein inneres Produkt auf V, sodass T orthogonal ist, oder zeigen Sie, dass kein inneres Produkt auf V existiert, sodass T orthogonal ist.

c) Sei wieder $V = \mathbb{R}^2$ und sei $T = L_A$ für $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V existiert, sodass T bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthogonal ist.

d) Können Sie ein hinreichendes Kriterium für T formulieren, sodass ein inneres Produkt auf V existiert, für welches T orthogonal ist?

Siehe nächstes Blatt!

5. Betrachte $\big(\mathbb{R}_2[X], \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, mit

$$\langle p, q\rangle := p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) \quad \big(p, q \in \mathbb{R}_2[X]\big).$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}_2[X]$ definiert.

b) Sei $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ definiert durch $p(X) \mapsto (X+1)p'(X)$. Zeigen Sie, dass $T \in \mathrm{End}\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$ und bestimmen Sie T^* bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

c) Sei $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(p) := \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$. Finden Sie $v \in \mathbb{R}_2[X]$, sodass $f(p) = \langle p, v\rangle$ für alle $p \in \mathbb{R}_2[X]$.

6. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ reelle, symmetrische Matrizen und sei A positiv definit. Zeigen Sie, dass eine invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ existiert, sodass Q^TAQ und Q^TBQ Diagonalmatrizen sind.

Hinweis: Betrachte das innere Produkt definiert durch A und diesbezüglich die Abbildung $L_{A^{-1}B}$.

Gilt die Aussage, wenn A nicht positiv definit ist? Untersuchen Sie hierfür die mit den Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ assoziierten Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$.

7. Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale Euklidische Räume. Gegeben sei ein Homomorphismus $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, sodass $\mathrm{Rang}(T) = 1$.

a) Zeigen Sie, dass $v \in V \setminus \{0\}$ und $w \in W \setminus \{0\}$ existieren, sodass

$$\forall u \in V : \ T(u) = \langle v, u\rangle w.$$

b) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung von T bezüglich v, w.

c) Bestimmen Sie $T^* : W \to V$.

8. **a)** Bestimmen Sie eine Darstellungsmatrix A der quadratischen Form:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \quad ((x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3).$$

b) Bestimmen Sie die Signatur von Q. Was können Sie über die Definitheit von Q sagen?

c) Bestimmen Sie eine Cholesky Zerlegung von A, d.h. finden Sie eine obere Dreiecksmatrix R, sodass die Diagonaleinträge von R alle nicht-negativ sind und sodass $A = R^TR$ gilt. Ist die Cholesky Zerlegung eindeutig durch A bestimmt?

Bitte wenden!

9. Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform sowie eine Jordan Basis der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}^5$.

10. **a)** Sei $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und sei $\mathbb{C}^n$ versehen mit dem standard komplexen inneren Produkt. Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Ker}(L_B) = \operatorname{Im}(L_{B^*})^{\perp},$$

wobei für eine Teilmenge $S \subset V$ eines komplexen Vektorraumes versehen mit einer Sesquilinearform γ das orthogonale Komplement von S definiert ist durch

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \forall s \in S : \gamma(v, s) = 0\}.$$

b) Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und sei $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ ein unitärer Vektorraum. Seien $v_1, \dots, v_m \in V$ und $w_1, \dots, w_m \in W$, sodass

$$\langle v_i, v_j\rangle_V = \langle w_i, w_j\rangle_W$$

gilt für alle $1 \le i, j \le m$. Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit $Tv_i = w_i$ für alle $1 \le i \le m$ existiert.

***c)** Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ keine nicht-triviale endlichdimensionale, stetige, unitäre Darstellung besitzt. Das heisst: Sei $n \geq \mathbb{N}$ und sei $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ eine stetige Abbildung bzgl. der Maximumnorm, sodass $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$ gilt für alle $g, h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Falls $\pi(g) \in U(n)$ ist für alle $g \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$, dann ist $\pi(g) = I_n$ für alle $g \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$.

Hinweis: Beachten Sie, dass nach Voraussetzung $\pi(I_2) = \pi(I_2)\pi(I_2)$ und folglich $\pi(I_2) = I_n$. Ähnlich folgt aus der Rechnung $I_n = \pi(gg^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1})$, dass $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1}$ für alle $g \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$.

Nehmen Sie zum Beweis an, die Darstellung ist unitär, d.h. $\pi(g) \in U(n)$ für alle $g \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$. Betrachten Sie die Untergruppen $N = \{u_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $N^- = \{v_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und zeigen Sie:

1. Die folgende Eigenschaft von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$: Jedes Element in $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ lässt sich als Produkt von Elementen in N und N^- schreiben, d.h. $N \cup N^-$ *erzeugt* $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein gemeinsamer Eigenvektor von $\pi(u_t)$ zum Eigenwert $\lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. wir bezeichnen durch $\lambda : t \mapsto \lambda_t$ die Abbildung gegeben durch $\pi(u_t)v = \lambda_t v$. Zeigen Sie, dass λ ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, d.h. die Abbildung λ ist stetig und für $t, s \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda_{t+s} = \lambda_t \lambda_s$.
3. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein gemeinsamer Eigenvektor von $\pi(u_t)$ wie oben. Zeigen Sie, dass für $a_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$ auch $\pi(a_2)v$ ein gemeinsamer Eigenvektor ist und folgern Sie, dass $\lambda_t = 1$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$.
4. Folgern Sie, dass $\pi(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})) = \{I_n\}$ ist.

11. Sei

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{SU}(2)$ und S^3 homöomorph sind, d.h. es existiert eine stetige Bijektion $\mathrm{SU}(2) \to S^3$ deren Inverse ebenfalls stetig ist.

Bemerkung: Als Korollar folgt, dass $\mathrm{SU}(2)$ einfach zusammenhängend ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Keine Abgabe

Zusammenfassung: Bitte beachten Sie die Deadline für die Zusammenfassung: Die endgültige Version wird, basierend auf der Stimmenvergabe im eSkript, nach dem 13.07.2017 erstellt. Achten Sie darauf, dass Sie bis dahin Ihre Präferenzen für die Zusammenstellung der Zusammenfassung geäussert haben.

Prüfung: Bitte bringen Sie zur Prüfung genügend eigenes Papier sowie blaue oder schwarze Kugelschreiber oder Füllfedern mit. Sie dürfen in der Prüfung keine roten oder grünen Kugelschreiber verwenden. Es sind keine Unterlagen oder Taschenrechner zugelassen. Die Zusammenfassung wird durch uns verteilt.

Bemerkung: Die Prüfung zur Linearen Algebra II wird von derselben Struktur sein, wie die Prüfung zur Linearen Algebra I. Das heisst, die Prüfung wird aus einem grossen Block an MC-Aufgaben sowie fünf schriftlichen Aufgaben bestehen, wobei die MC-Aufgabe 25% der erreichbaren Punktzahl an der ganzen Prüfung ausmacht und die restlichen Punkte uniform auf die schriftlichen Aufgaben verteilt sind. Die MC-Aufgaben sind alles wahr/falsch Aufgaben. Eine richtige Antwort gibt einen Punkt, eine falsche Antwort gibt keinen Punkt. Für eine 6 werden etwa 85% der Punkte benötigt. Beachten Sie, dass der Inhalt und auch der Schwierigkeitsgrad der tatsächlichen Prüfung nicht demjenigen dieser Repetitionsserie entsprechen muss.