Prüfungsaufgaben Version A

1. *(30 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

i) Sei
$$P = \{p \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N} : (m \text{ teilt } p \Rightarrow (m = 1 \lor m = p))\}.$$
Dann ist $|P| < \infty$.

ii) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$$

iii) Sei X eine Menge und sei R die auf der Menge $\mathbb{P}X$ der Teilmengen von X definierte Relation gegeben durch
$$ARB \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$
Dann ist R transitiv.

iv) In jeder Gruppe $(G, \circ, e)$ gilt
$$\forall a, b, c \in G : b = c \iff a \circ b = a \circ c$$

v) Sei V ein Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume. So sind $W_1 \cap W_2$ und $W_1 \cup W_2$ auch Unterräume von V.

vi) Die Menge $\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 0\}$ ist ein Unterraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

vii) Betrachten Sie die Unterräume $V_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$. Dann ist $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

viii) Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dann ist $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\}$ ein Unterrraum von $\mathbb{K}^n$.

ix) Sei V ein Vektorraum. Je zwei Erzeugendensysteme von V haben dieselbe Kardinalität.

x) Sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}).$$
$\mathcal{B}$ ist genau dann eine Basis von $\mathbb{C}^2$, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

xi) Sei V ein Vektorraum. Dann gilt: Jede Teilmenge von V ist entweder linear abhängig oder linear unabhängig.

Bitte wenden!

xii) Drei Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig genau dann wenn sie paarweise linear unabhängig sind (also wenn jede der Mengen $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}$ linear unabhängig ist).

xiii) Sei V ein Vektorraum. Für jede Teilmenge $S \subset V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- Kein Element von S ist eine Linearkombination der übrigen Elemente von S.
- Jeder Vektor in V besitzt höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S.

xiv) Sei V ein endlichdimensionaler Vetorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume mit $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Dann gilt

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) \cdot \dim(W_2).$$

xv) Die Abbildung $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch $T(f) = f'$ ist linear.

xvi) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 2$.

xvii) Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt: T ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

xviii) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Es gilt $\dim \mathrm{Ker}(T^2) \geq \dim \mathrm{Ker}(T)$.

xix) Es gibt eine invertierbare, reelle 3×3 Matrix, die schiefsymmetrisch ist.

xx) Die einzige reelle 2×2 Matrix A, die $A^2 = 0$ erfüllt, ist $A = 0$.

xxi) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$.

xxii) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$.

xxiii) Der Rang einer Dreiecksmatrix ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.

xxiv) Eine Matrix ist genau dann nicht invertierbar wenn Zeilenrang $\neq$ Spaltenrang.

xxv) Seien $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ und $m > n$. Dann gilt $\det(AB^T) = 0$.

xxvi) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

xxvii) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, dann gilt

$$\det(A + B) = \det(B + A).$$

Siehe nächstes Blatt!

xxviii) Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $m < n$. Dann besitzt das System $AX = 0$ nicht-triviale Lösungen.

xxix) Sei $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und

$$\mathrm{tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; A \mapsto \mathrm{tr}(A)$$

die Spur. Dann ist $\mathrm{tr} \in V^*$.

xxx) Sei $T : V \to V^*$ ein Isomorphismum, $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}^*$ eine geordnete Basis von V^*. Dann gilt $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$.

2. *(15 Punkte)*

a) Geben Sie die Definition einer Relation auf einer Menge M an. Geben Sie die Axiome an, die eine Relation erfüllen muss, damit es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Wir definieren eine Relation auf $\mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{R})$ wie folgt: $A, B \in \mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{R})$ erfüllen $A \sim B$, wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $Av = \lambda Bv$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert.

c) Sei $A \in \mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von A.

3. *(15 Punkte)* Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten.

a) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + x$, $p_3(x) = 2x^2 + x$ eine Basis von V bilden.

b) Sei $T : V \to V$ die Abbildung $p(x) \mapsto x \cdot p'(x)$. Zeigen Sie, dass T eine wohldefinierte (d.h. $T(p) \in V$ für alle $p \in V$) lineare Abbildung ist.

c) Ist T invertierbar?

d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ von V.

e) Bestimmen Sie das Urbild von $\{x^2\}$ unter T.

4. *(15 Punkte)*

a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und seien $G \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{K})$ und $F \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie $\mathrm{Ker}(L_{AF}) = F^{-1}\mathrm{Ker}(L_A)$ und $\mathrm{Im}(L_{GA}) = G\mathrm{Im}(L_A)$.

Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Für $a, b, c \in \mathbb{K}$ definieren wir die Gerade

$$\mathcal{G}_{a,b,c} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid ax_1 + bx_2 = c\}.$$

b) Seien (a_1, b_1, c_1), $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{K}^3$. Bestimmen Sie die Kardinalität von

$$\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}.$$

5. *(15 Punkte)* Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume von V.

a) Sei $\dim W_i = m_i, i = 1, 2$ mit $m_1 \leq m_2$. Beweisen Sie, dass $\dim(W_1 \cap W_2) \leq m_1$ und $\dim(W_1 + W_2) \leq m_1 + m_2$.

b) Geben Sie an welche Eigenschaften V, W_1 und W_2 erfüllen müssen, damit V die direkte Summe von W_1 und W_2 ist.

Siehe nächstes Blatt!

c) Beweisen Sie die folgende Aussage: $V = W_1 \oplus W_2$ genau dann, wenn für alle $v \in V$ eindeutige $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ existieren, sodass $v = w_1 + w_2$ gilt.

d) Sei $W_1 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A_{ij} = 0 \,\text{falls}\, i \leq j\}$ und sei W_2 die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Sowohl W_1 wie auch W_2 sind Unterräume von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Beweisen Sie, dass

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W_1 \oplus W_2.$$

6. *(15 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei W ein Unterraum von V.

a) Sei $W^\perp = \{f \in V^* \mid W \subset \mathrm{Ker}(f)\}$. Zeigen Sie, dass $W^\perp \subset V^*$ ein Unterraum ist.

b) Definieren Sie die Abbildung

$$\Phi : W^\perp \to (V/W)^*, \Phi(f)(v + W) = f(v) \quad (v \in V).$$

Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert ist.

c) Zeigen Sie, dass Φ linear ist.

d) Zeigen Sie, dass Φ invertierbar ist und dass somit gilt

$$(V/W)^* \cong W^\perp.$$

e) Sei $p : V \to V/W$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass p^* unter der Identifikation $(V/W)^* \cong W^\perp$ mit der Einbettung $i : W^\perp \hookrightarrow V^*$ übereinstimmt.

7. *(15 Punkte)* Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

a) Seien $S, T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ von Null verschieden und sei $\mathrm{Rang}(S) \neq \mathrm{Rang}(T)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{S, T\}$ linear unabhängig ist.

b) Seien $S, T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ von Null verschieden und sei $\mathrm{nullity}(S) \neq \mathrm{nullity}(T)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{S, T\}$ linear unabhängig ist.

c) Geben Sie die Definition einer Projektion $P \in \mathrm{End}(V)$. Ist die Komposition zweier Projektionen wieder eine Projektion?

d) Seien $V_1, V_2 \subset V$, $W_1, W_2 \subset W$ Unterräume, sodass $V = V_1 \oplus V_2$ sowie $W = W_1 \oplus W_2$ gilt. Seien $P \in \mathrm{End}(V)$ und $Q \in \mathrm{End}(W)$ die Projektionen auf V_1 bzw. W_1 mit $\mathrm{Ker}(P) = V_2$ und $\mathrm{Ker}(Q) = W_2$.

Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\Phi, \Psi : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W)$ gegeben durch $\Phi(T) = TP$ und $\Psi(T) = QT$ Projektionen sind. Bestimmen Sie jeweils den Kern dieser Abbildungen.