Sommer 2017

1. *(15 Punkte)*

a) Geben Sie die Definition einer Relation auf einer Menge M an. Geben Sie die Axiome an, die eine Relation erfüllen muss, damit es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Wir definieren eine Relation auf $\mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{R})$ wie folgt: $A, B \in \mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{R})$ erfüllen $A \sim B$, wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $Av = \lambda Bv$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert.

c) Sei $A \in \mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von A.

Lösung

a) Eine Relation auf M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Eine Relation ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität: Der Graph der Identitätsabbildung ist eine Teilmenge von R.

Symmetrie: R ist invariant unter Transposition, d.h. $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$.

Transitivität $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

b) **Reflexivität:** Sei $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, dann ist $Av = 1 \cdot Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, und somit gilt $A \sim A$.

Symmetrie: Sei $B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, sodass $A \sim B$ ist. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass $\lambda \in \mathbb{R}^*$ existiert, sodass $Bv = \lambda Av$ ist. Nach Voraussetzung existiert ein $\mu \in \mathbb{R}^*$, sodass $Av = \mu Bv$, und somit für $\lambda = \mu^{-1}$ also $Bv = \lambda Av$.

Transitivität: Sei $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, sodass $B \sim C$ ist (und sei weiterhin $A \sim B$). Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass $\lambda \in \mathbb{R}^*$ existiert, sodass $Av = \lambda Cv$ ist. Nach Voraussetzung existieren $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$, sodass $Av = \mu_1 Bv$ sowie $Bv = \mu_2 Cv$. Also ist $Av = \mu_1\mu_2 Cv$ und da $\mu_1\mu_2 \in \mathbb{R}^*$ ist, folgt $A \sim C$.

c) Angenommen $A \sim B$, dann ist jeder von 0 verschiedene Vektor ein Eigenvektor von $B^{-1}A$. Insbesondere besitzt $\mathbb{R}^n$ eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ bestehend aus Eigenvektoren von $B^{-1}A$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$, sodass $B^{-1}Av_i = \lambda_i v_i$ ist. Setze $v = v_1 + \cdots + v_n$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}^*$, sodass $B^{-1}Av = \lambda v$. Dann folgt

$$0 = \lambda v - B^{-1}Av = \lambda \sum_{i=1}^{n} v_i - \sum_{i=1}^{n} B^{-1}Av_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) v_i.$$

Da nach Voraussetzung $v_1 \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, ist also $\lambda_i = \lambda$ für alle $1 \leq i \leq n$ und somit $B^{-1}Av = \lambda v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Es folgt $\lambda^{-1}A = B$ und somit gilt $A \sim B \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : B = \lambda A$. Andererseits ist klar, dass für $B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ von der Form $B = \lambda^{-1}A$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$ gilt $Av = \lambda(\lambda^{-1}A)v = \lambda Bv$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Also ist

$$[A]_\sim = \{\lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

Bitte wenden!

2. *(15 Punkte)* Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten.

a) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + x$, $p_3(x) = 2x^2 + x$ eine Basis von V bilden.

b) Sei $T : V \to V$ die Abbildung $p(x) \mapsto x \cdot p'(x)$. Zeigen Sie, dass T eine wohldefinierte (d.h. $T(p) \in V$ für alle $p \in V$) lineare Abbildung ist.

c) Ist T invertierbar?

d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ von V.

e) Bestimmen Sie das Urbild von $\{x^2\}$ unter T.

Lösung

a) Sei $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$, dann ist $\mathcal{E}$ eine Basis von V und es ist $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ das Bild von $\mathcal{E}$ unter der Abbildung $S : V \to V$ mit Darstellungsmatrix

$$[S]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet $\det(S) = 1$ und somit ist S invertierbar. Da S invertierbar ist, bildet S Basen auf Basen ab und weil $\mathcal{E}$ eine Basis von V ist, ist somit $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

b) Wir wissen, dass die Ableitung linear ist (da punktweise linear: in der Analysis wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n + b_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

gilt, wann immer $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ sind – die Studierenden müssen dies aber nicht ausführen). Die Abbildung $p \mapsto xp$ ist linear, da die Multiplikation im Ring $P(\mathbb{R})$ distributiv und kommutativ ist. Folglich ist die Abbildung $p \mapsto xp'(x)$ eine Komposition linearer Abbildungen und damit linear.

Wir wissen aus der Analysis, dass $\deg(p') = \deg(p) - 1$ gilt, wann immer p nicht konstant ist und für konstante p ist $p' = 0$. Insbesondere ist $p' \in P_{\leq 1}(\mathbb{R})$ wann immer $p \in P_{\leq 2}(\mathbb{R})$ ist und wegen $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$ für alle p, q folgt $\deg(xp') = \deg(x) + \deg(p') \leq 1 + 1 = 2$ für alle $p \in V$.

c) Wie oben erwähnt, gilt $\deg(Tp) = 1 + \deg(p')$. Da $\deg(p') \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ ist, gilt $\deg(Tp) \neq 0$. Folglich enthält das Bild von T keine von 0 verschiedenen konstanten Polynome und somit ist T nicht surjektiv. Insbesondere also nicht invertierbar.

d) Es ist

$$[I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir müssen also nur $([I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1}$ berechnen. Man beachte, dass $[I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = [S]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$. Gauss-Elimination liefert

$$
\begin{aligned}
([S]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}|I_4) &\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

und folglich ist

$$
([I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

und somit

$$
[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ([I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

e) Es ist $T^{-1}(x^2)$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Tp = x^2$ und somit von der Form $p_0 + \mathrm{Ker}(T)$ für ein beliebiges Polynom p_0, sodass $Tp_0 = x^2$ gilt. Wir haben bereits gesehen, dass $P_{\leq 0}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(T)$ und weil die Darstellungsmatrix von T bezüglich $\mathcal{E}$ die Form

$$
[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

und somit Rang 2 besitzt, ist $\mathrm{Ker}(T)$ eindimensional und folglich $\mathrm{Ker}(T) = P_{\leq 0}(\mathbb{R})$. Es ist $T(\frac{1}{2}x^2) = x^2$ und folglich

$$
T^{-1}(x^2) = \tfrac{1}{2}x^2 + \mathrm{Ker}(T) = \{\tfrac{1}{2}x^2 + c \mid c \in \mathbb{R}\}.
$$

3. *(15 Punkte)*

a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und seien $G \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{K})$ und $F \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie $\mathrm{Ker}(L_{AF}) = F^{-1}\mathrm{Ker}(L_A)$ und $\mathrm{Im}(L_{GA}) = G\mathrm{Im}(L_A)$.

Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Für $a, b, c \in \mathbb{K}$ definieren wir die Gerade

$$
\mathcal{G}_{a,b,c} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid ax_1 + bx_2 = c\}.
$$

b) Seien (a_1, b_1, c_1), $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{K}^3$. Bestimmen Sie die Kardinalität von

$$
\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}.
$$

Bitte wenden!

Lösung

a) Es ist

$$
\begin{aligned}
v \in \operatorname{Ker}(L_{AF}) &\Leftrightarrow L_{AF}v = 0 \Leftrightarrow L_A(L_F v) = 0 \Leftrightarrow L_F v \in \operatorname{Ker}(L_A) \\
&\Leftrightarrow v \in L_F^{-1}\operatorname{Ker}(L_A) = F^{-1}\operatorname{Ker}(L_A), \\
w \in \operatorname{Im}(L_{GA}) &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n : w = L_{GA}(v) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n : w = L_G(L_A v) = G(L_A v) \\
&\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n : G^{-1}w = L_A v \Leftrightarrow G^{-1}w \in \operatorname{Im}(L_A) \\
&\Leftrightarrow w \in G\operatorname{Im}(L_A).
\end{aligned}
$$

b) Es ist

$$\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2} = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid a_i x_1 + b_i x_2 = c_i \quad (i=1,2)\big\}$$

und somit ist $\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = z$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

"$\det(A) \neq 0$": Falls A invertierbar (bzw. vollen Rang besitzt) ist, dann existiert genau eine Lösung $x = A^{-1}z$ und somit ist

$$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |\{A^{-1}z\}| = 1.$$

"$\det(A) = 0$": Falls A nicht invertierbar ist, existieren zwei Möglichkeiten:

- Wenn $\operatorname{Rang}(A) = 0$ ist, dann ist A die Nullmatrix und es existieren die folgenden Möglichkeiten:
  - Falls $z = 0$ ist, dann gilt $Ax = z$ für alle $x \in \mathbb{K}^2$ und somit ist
  $$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |\mathbb{K}^2| = |\mathbb{K}|^2.$$
  - Falls $z \neq 0$ ist, dann ist $Ax \neq z$ für alle $x \in \mathbb{K}^2$ und somit ist
  $$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |\emptyset| = 0.$$
- Falls $\operatorname{Rang}(A) = 1$, dann existieren zwei Optionen:
  - Falls $z \notin \operatorname{Im}(L_A)$, dann existiert keine Lösung und folglich ist
  $$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |\emptyset| = 0.$$
  - Falls $z \in \operatorname{Im}(L_A)$, dann ist die Menge der Lösungen von der Form $x_0 + \operatorname{Ker}(L_A)$, wobei x_0 eine beliebige Lösung von $Ax = z$ ist, und eine solche existiert. Da $\operatorname{Rang}(A) = 1$ ist, ist $\dim \operatorname{Ker}(L_A) = \dim \mathbb{K}^2 - \operatorname{Rang}(A) = 1$ und somit ist $\operatorname{Ker}(L_A) \cong \mathbb{K}$. Es folgt
  $$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |x_0 + \operatorname{Ker}(L_A)| = |\operatorname{Ker}(L_A)| = |\mathbb{K}|,$$
  wobei wir in der zweitletzten Gleichung verwendet haben, dass die Abbildung $v \mapsto x_0 + v$ eine Bijektion ist, da invertierbar mit Inversen $v \mapsto -x_0 + v$.

Siehe nächstes Blatt!

4. *(15 Punkte)* Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume von V.

a) Sei $\dim W_i = m_i, i = 1, 2$ mit $m_1 \leq m_2$. Beweisen Sie, dass $\dim(W_1 \cap W_2) \leq m_1$ und $\dim(W_1 + W_2) \leq m_1 + m_2$.

b) Geben Sie an welche Eigenschaften V, W_1 und W_2 erfüllen müssen, damit V die direkte Summe von W_1 und W_2 ist.

c) Beweisen Sie die folgende Aussage: $V = W_1 \oplus W_2$ genau dann, wenn für alle $v \in V$ eindeutige $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ existieren, sodass $v = w_1 + w_2$ gilt.

d) Sei $W_1 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A_{ij} = 0 \,\text{falls}\, i \leq j\}$ und sei W_2 die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Sowohl W_1 wie auch W_2 sind Unterräume von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Beweisen Sie, dass
$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W_1 \oplus W_2.$$

Lösung

a) Es gilt
$$W_1 \cap W_2 \subset W_1 \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim W_1 = m_1,$$
wie in der Vorlesung bewiesen.
Es gilt aufgrund der Dimensionsformel
$$\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2) \leq \dim(W_1)+\dim(W_2) = m_1+m_2.$$

b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei Unterräume. V ist die direkte Summe von W_1 und W_2, wenn gelten $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

c) Angenommen $V = W_1 \oplus W_2$, sei $v \in V$. Nach Voraussetzung ist $v = w_1 + w_2$ für zwei Vektoren $w_i \in W_i$. Seien $\tilde{w}_i \in W_i$, sodass $v = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$, dann gilt also
$$w_1 - \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 - w_2$$
und da $w_i, \tilde{w}_i \in W_i$ sind, folgt $w_i - \tilde{w}_i \in W_i$ und also ist $w_1 - \tilde{w}_1 \in W_1$ und $w_1 - \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 - w_2 \in W_2$, sprich $w_1 - \tilde{w}_1 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Aus der Eindeutigkeit der additiven Inversen folgt $w_1 = \tilde{w}_1$ und folglich
$$v = w_1 + w_2 = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = w_1 + \tilde{w}_2 \Rightarrow w_2 = \tilde{w}_2$$
aufgrund der Kürzungsregeln in Gruppen. Dies zeigt, dass die Darstellung $v = w_1 + w_2$ eindeutig ist.
Seien nun W_1, W_2 Unterräume von V, sodass jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig als Summe $v = w_1 + w_2$ mit $w_i \in W_i$ schreiben lässt. Dann gilt insbesondere $V = W_1 + W_2$. Wir müssen also nur folgern, dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ist. Sei nun $v \in W_1 \cap W_2$. Dann sind $v = w_1 + 0$ mit $v = w_1 \in W_1$ und $v = 0 + w_2$ mit $v = w_2 \in W_2$ zwei Zerlegungen. Da jede solche Zerlegung eindeutig durch v bestimmt ist, gilt also $w_2 = 0$ (bzw. $w_1 = 0$) und somit $v = 0$. Das zeigt $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Bitte wenden!

d) Sei $A \in W_1 \cap W_2$. Es gilt $A_{ij} = 0$ für alle $1 \le i \le j \le n$, da $A \in W_1$. Sei $j < i$, dann gilt wegen $A \in W_2$, dass $A_{ij} = A_{ji}$ und da $A_{ji} = 0$ ist, folgt $A_{ij} = 0$. Dies zeigt, dass $A = 0$ ist und somit gilt $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
Wir müssen also nur noch zeigen, dass $M_{n \times n}(\mathbb{K}) = W_1 + W_2$ ist. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Wir definieren Matrizen $U, S \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ durch

$$U_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \le i \le j \le n \\ A_{ij} - A_{ji} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad S_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{falls } 1 \le i \le j \le n \\ A_{ji} & \text{sonst} \end{cases}$$

und wir erhalten $A = U + S$, wobei $U \in W_1, S \in W_2$ nach Konstruktion.

5. *(15 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei W ein Unterraum von V.

a) Sei $W^\perp = \{f \in V^* \mid W \subset \operatorname{Ker}(f)\}$. Zeigen Sie, dass $W^\perp \subset V^*$ ein Unterraum ist.

b) Definieren Sie die Abbildung

$$\Phi : W^\perp \to (V/W)^*, \Phi(f)(v + W) = f(v) \quad (v \in V).$$

Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert ist.

c) Zeigen Sie, dass Φ linear ist.

d) Zeigen Sie, dass Φ invertierbar ist und dass somit gilt

$$(V/W)^* \cong W^\perp.$$

e) Sei $p : V \to V/W$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass p^* unter der Identifikation $(V/W)^* \cong W^\perp$ mit der Einbettung $i : W^\perp \hookrightarrow V^*$ übereinstimmt.

Lösung

a) Es ist $0 \in W^\perp$ und somit $W^\perp \neq \emptyset$. Seien $f_1, f_2 \in W^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Für $w \in W$ gilt

$$(f_1 + \alpha f_2)(w) = f_1(w) + \alpha f_2(w) = 0$$

und somit $f_1 + \alpha f_2 \in W^\perp$. Da $f_1, f_2 \in W^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig waren, ist $W^\perp$ also ein Unterraum von V^*.

b) Angenommen $v + W = v' + W$ und $f \in W^\perp$, dann ist $v' - v = w$ für ein $w \in W$ und folglich

$$f(v') = f(v + w) = f(v) + f(w) = f(v)$$

und somit ist $\Phi(f)(v + W)$ nicht abhängig von der Wahl des Repräsentanten von $v + W$. Insbesondere ist $\Phi(f)$ wohldefiniert.

c) Seien $f_1, f_2 \in W^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$, dann ist

$$\Phi(f_1 + \alpha f_2)(v + W) = (f_1 + \alpha f_2)(v) = f_1(v) + \alpha f_2(v) = \Phi(f_1)(v + W) + \alpha \Phi(f_2)(v + W).$$

Da v beliebig war, gilt also $\Phi(f_1 + \alpha f_2) = \Phi(f_1) + \alpha \Phi(f_2)$ und folglich ist Φ linear.

Siehe nächstes Blatt!

d) Sei $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, dann ist $\Phi(f)(v+W) = f(v) = 0$ für alle $v \in V$, und folglich ist $f = 0$. Insbesondere ist Φ also injektiv.

Sei $g \in (V/W)^*$ und sei $p : V \to V/W$ die kanonische Projektion. Wir definieren $f \in V^*$ durch $f(v) = (g \circ p)(v)$. Da p und f linear sind, ist auch f linear und somit wohldefiniert. Für $w \in W$ gilt $f(w) = g(p(w)) = g(W) = 0$, da W das neutrale Element in V/W ist. Also ist $f \in W^{\perp}$. Wir berechnen

$$\Phi(f)(v+W) = f(v) = g(p(v)) = g(v+W)$$

und folglich ist $\Phi(f) = g$. Da g beliebig war, ist Φ surjektiv und also ein Isomorphismus.

e) Wir wissen aus der Vorlesung, dass $p^*(f) = f \circ p$ für alle $f \in (V/W)^*$ ist.

Unter der Identifikation $\Phi : W^{\perp} \xrightarrow{\sim} (V/W)^*$ erhalten wir für beliebige $f \in W^{\perp}$ und $v \in V$:

$$p^*(\Phi f)(v) = \Phi(f)(p(v)) = \Phi(f)(v+W) = f(v)$$

und somit ist $p^*(\Phi f) = f$, wie gewünscht.

6. *(15 Punkte)* Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

a) Seien $S, T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ von Null verschieden und sei $\mathrm{Rang}(S) \neq \mathrm{Rang}(T)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{S, T\}$ linear unabhängig ist.

b) Seien $S, T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ von Null verschieden und sei $\mathrm{nullity}(S) \neq \mathrm{nullity}(T)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{S, T\}$ linear unabhängig ist.

c) Geben Sie die Definition einer Projektion $P \in \mathrm{End}(V)$. Ist die Komposition zweier Projektionen wieder eine Projektion?

d) Seien $V_1, V_2 \subset V$, $W_1, W_2 \subset W$ Unterräume, sodass $V = V_1 \oplus V_2$ sowie $W = W_1 \oplus W_2$ gilt. Seien $P \in \mathrm{End}(V)$ und $Q \in \mathrm{End}(W)$ die Projektionen auf V_1 bzw. W_1 mit $\mathrm{Ker}(P) = V_2$ und $\mathrm{Ker}(Q) = W_2$.

Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\Phi, \Psi : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W)$ gegeben durch $\Phi(T) = TP$ und $\Psi(T) = QT$ Projektionen sind. Bestimmen Sie jeweils den Kern dieser Abbildungen.

Lösung

a) Sei $\mathrm{Rang}(S) < \mathrm{Rang}(T)$. Dann existiert ein $w \in \mathrm{Im}(T)$ mit $w \notin \mathrm{Im}(S)$. Sei $v \in V$, sodass $w = Tv$. Angenommen $\alpha S + \beta T = 0$, dann ist insbesondere $0 = \alpha S v + \beta T v = S(\alpha v) + \beta w$. Insbesondere ist also $-\beta w \in \mathrm{Im}(S)$ und folglich ist $\beta = 0$, da ansonsten $-\beta \in \mathbb{K}^*$ invertierbar ist und $w \in (-\beta)^{-1}\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(S)$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $0 = \alpha S$. Da $S \neq 0$, ist also $\alpha = 0$. Insbesondere ist also $\{S, T\}$ linear unabhängig.

Der Fall $\mathrm{Rang}(S) > \mathrm{Rang}(T)$ folgt analog nach Umbenennung der Abbildungen.

Bitte wenden!

b) Sei $\text{nullity}(S) < \text{nullity}(T)$, dann folgt

$$\text{Rang}(S) = \dim(V) - \text{nullity}(S) > \dim(V) - \text{nullity}(T) = \text{Rang}(T)$$

und folglich gilt $\text{Rang}(S) \neq \text{Rang}(T)$. Die Behauptung folgt also aus der vorangehenden Teilaufgabe.

Der Fall $\text{nullity}(S) > \text{nullity}(T)$ folgt analog nach Umbenennung der Abbildungen.

c) Eine Abbildung $P \in \text{End}(V)$ heisst Projektion, falls gilt $P^2 = P$. Im Allgemeinen ist die Komposition zweier Projektionen keine Projektion. Als Beispiel nehmen wir die Komposition der Projektionen $P_1, P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben wie oben durch die Zerlegungen

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 = \mathbb{R}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{R}(e_1 - e_2),$$

$\text{Ker}(P_1) = \mathbb{R}e_1$, $\text{Im}(P_1) = \mathbb{R}e_2$, $\text{Ker}(P_2) = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$, $\text{Im}(P_2) = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$. Man beachte, dass

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$$

eine Zerlegung von e_1 in Summanden aus $\mathbb{R}(e_1 + e_2)$ und $\mathbb{R}(e_1 - e_2)$ ist. Folglich ist

$$P_1P_2(e_1) = P_1\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)\big) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1$$

und insbesondere

$$(P_1P_2)^2(e_1) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}P_1P_2(e_1) = \tfrac{1}{2}e_1 \neq \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1$$

und somit ist $(P_1P_2)^2 \neq P_1P_2$, also P_1P_2 keine Projektion.

d) Es gilt $\Phi^2(T) = \Phi(\Phi(T)) = \Phi(TP) = TP^2 = TP = \Phi(T)$ und $\Psi^2(T) = \Psi(\Psi(T)) = \Psi(QT) = Q^2T = QT = \Psi(T)$, da $P^2 = P$ und $Q^2 = Q$.

Wir wissen aus den Übungen, dass $V = \text{Ker}(P) \oplus \text{Im}(P)$ und $W = \text{Ker}(Q) \oplus \text{Im}(Q)$ ist, wobei nach Voraussetzung $\text{Im}(P) = V_1$, $\text{Ker}(P) = V_2$, $\text{Im}(Q) = W_1$ und $\text{Ker}(Q) = W_2$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
T \in \text{Ker}(\Phi) &\Leftrightarrow \forall v \in V : \Phi(T)(v) = T(Pv) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall v \in V : Pv \in \text{Ker}(T) \\
&\Leftrightarrow \text{Im}(P) \subset \text{Ker}(T) \\
&\Leftrightarrow V_1 \subset \text{Ker}(T), \\
T \in \text{Ker}(\Psi) &\Leftrightarrow \forall v \in V : \Psi(T)(v) = Q(Tv) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall v \in V : Tv \in \text{Ker}(Q) \\
&\Leftrightarrow \text{Im}(T) \subset \text{Ker}(Q) \\
&\Leftrightarrow \text{Im}(T) \subset W_2.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\Phi) &= \{T \in \text{Hom}(V, W) \mid V_1 \subset \text{Ker}(T)\}, \\
\text{Ker}(\Psi) &= \{T \in \text{Hom}(V, W) \mid \text{Im}(T) \subset W_2\}.
\end{aligned}$$