Sommer 2017

1. *(30 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

i) Die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $AX = b$ für eine quadratische Matrix A und einen von 0 verschiedenen Vektor b sei $X = -b$. Dann ist $-b$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

ii) Jede reelle 2017×2017 Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

iii) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ mit $A_{ij} \neq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist A nicht nilpotent.

iv) Jede zu einer orthogonalen Matrix kongruente Matrix ist selbst wieder orthogonal.

v) Eine lineare Abbildung T auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.

vi) Die inverse Matrix einer invertierbaren diagonalisierbaren Matrix ist diagonalisierbar.

vii) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $S \subset V$. Dann ist $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

viii) Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, $T \in \operatorname{End}(V)$ und $W \subset V$ ein T-invarianter Unterraum. Dann ist $W^{\perp}$ auch T-invariant.

ix) Seien S und T selbstadjungierte Abbildungen. Dann ist die Komposition ST selbstadjungiert.

x) Es gibt eine Basis (u_1, u_2) von $\mathbb{R}^2$ mit dem standard inneren Produkt, sodass $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ und $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$.

xi) Sei $Q \in O(n)$, dann ist Q über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

xii) Jede Rotation eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums besitzt einen Eigenwert.

xiii) Jede symmetrische, positiv definite Matrix $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige Quadratwurzel $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, d.h. $A^2 = B$.

xiv) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Dann ist $A + B$ positiv definit.

xv) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) > 1$ und sei β eine Bilinearform auf V. Dann existiert für jedes $u \in V$ ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $\beta(u, v) = 0$.

Bitte wenden!

xvi) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum und sei β eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V. Dann ist die Darstellungsmatrix von β invertierbar.

xvii) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei β eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Dann ist die Abbildung $V \mapsto V^*$, $v \mapsto \beta(v, \cdot)$ ein Isomorphismus.

xviii) Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$. Die Darstellungsmatrix von Q ist genau dann invertierbar, wenn sie positiv oder negativ definit ist.

xix) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann ist A ähnlich zu A^T.

xx) Hat eine 3×3 Matrix A nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachkeit 3, so gilt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

xxi) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und sei $W \subset V$ gegeben durch

$$W = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I_V)^k(v) = 0\}.$$

Dann ist $T - \lambda I_V\big|_W$ nilpotent.

xxii) Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, aber nicht über $\mathbb{R}$.

xxiii) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist $T = T_1 + T_2$, wobei $T_1T_2 = T_2T_1$ gilt, T_1 diagonalisierbar und T_2 nilpotent ist.

xxiv) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ ein Operator endlicher Ordnung, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $T^k = I_V$ ist. Dann ist T diagonalisierbar.

xxv) Seien U eine unitäre und A eine invertierbare $n \times n$ Matrix, sodass AUA^{-1} diagonal ist. Dann ist A unitär.

xxvi) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass 1 der einzige Eigenwert von T ist. Dann ist T unitär.

xxvii) Sei V ein komplexer Vektorraum. Für jede hermitesche Form $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ gilt $\gamma(u, u) \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$.

xxviii) Jede diagonalisierbare Matrix ist normal.

xxix) Jede reelle normale Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist selbstadjungiert.

xxx) Die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \pi & -7 & 4+2i \\ -7 & \sqrt{2} & 3i \\ 4-2i & -3i & 2i \end{pmatrix}$$

zugehörige Sesquilinearform ist hermitesch.

Siehe nächstes Blatt!

2. *(15 Punkte)*

a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Geben Sie die Definition eines Eigenwertes von T und zeigen Sie für endlichdimensionales V, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von T ist, wenn $\det(T - \lambda I_V) = 0$.

b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar, sodass $AB = BA$ ist. Zeigen Sie, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor in $\mathbb{R}^n$ besitzen.

c) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei $\mathrm{Rang}(A) = 1$. Zeigen Sie, dass $\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{Spur}(A)$ gilt.

3. *(15 Punkte)*

a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $S \subset V$ eine nicht-leere Teilmenge, deren Elemente alle von 0 verschieden und paarweise orthogonal sind. Dann ist S linear unabhängig.

b) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass alle Eigenwerte der Abbildung $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ von der Form αi für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ sind. Zeigen Sie, dass $I_n + A$ und $I_n - A$ invertierbar sind.

c) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch. Zeigen Sie, dass die Matrix $I_n + A$ invertierbar und dass $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ orthogonal ist.

4. *(15 Punkte)* Im Folgenden sei $S_3(\mathbb{R}) \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen, symmetrischen 3×3-Matrizen.

a) Definieren Sie den Begriff Kongruenz für Matrizen in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Zeigen Sie, dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation auf $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ und auf $S_3(\mathbb{R})$ definiert.

c) Zeigen Sie, dass es auf $S_3(\mathbb{R})$ genau 10 Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation gibt.

d) Eine Matrix $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ist eine *Gram'sche* Matrix, falls $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ existiert, sodass $A = B^T B$ gilt. Zeigen Sie: $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ist genau dann eine Gram'sche Matrix, wenn A symmetrisch ist und alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.

5. *(15 Punkte)*

a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in \sigma(T)$. Definieren Sie den Zyklus des verallgemeinerten Eigenvektors $v \in K_\lambda \setminus \{0\}$.

b) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: falls 0 der einzige Eigenwert von A ist, dann ist A nilpotent.

Bitte wenden!

c) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ nicht nilpotent. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind ähnlich}\}$$

endlich ist.

d) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Menge

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind ähnlich}\}.$$

6. *(15 Punkte)* Im Folgenden sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ versehen mit einem Euklidischen bzw. einem hermiteschen inneren Produkt.

a) Nehmen Sie an, dass $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum ist, und beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn $T \in \mathrm{End}(V)$ einen Eigenvektor in V besitzt, dann besitzt die adjungierte Abbildung T^* einen Eigenvektor.

b) Nehmen Sie an, dass $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum ist, und beweisen Sie dieselbe Aussage in diesem Fall.

c) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitär und sei $S \in \mathrm{End}(V)$, sodass $\langle Sv, v\rangle = 0$ gilt für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass $S = 0$ ist.

d) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Geben Sie die Definition eines selbstadjungierten Operators $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie im Anschluss, dass T genau dann selbstadjungiert ist, wenn die Adjungierte von T existiert und für alle $v \in V$ gilt

$$\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R} \qquad (v \in V).$$

7. *(15 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass jede positiv definite, symmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Cholesky-Zerlegung besitzt, d.h. es existiert eine obere Dreiecksmatrix $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass $A = R^T R$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Cholesky-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$