Sommer 2017 Musterlösung

2. *(15 Punkte)*

a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Geben Sie die Definition eines Eigenwertes von T und zeigen Sie für endlichdimensionales V, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von T ist, wenn $\det(T - \lambda I_V) = 0$.

b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar, sodass $AB = BA$ ist. Zeigen Sie, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor in $\mathbb{R}^n$ besitzen.

c) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei $\mathrm{Rang}(A) = 1$. Zeigen Sie, dass $\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{Spur}(A)$ gilt.

Lösung

a) $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von T, wenn $v \in V \setminus \{0\}$ existiert, sodass $Tv = \lambda v$ gilt.

Das heisst insbesondere, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von T von ist, wenn $\mathrm{Ker}(T - \lambda I_V) \neq \{0\}$ bzw. wenn $T - \lambda I_V$ nicht injektiv ist.

Wenn V endlichdimensional ist, dann ist $T - \lambda I_V$ genau dann nicht injektiv, wenn $T - \lambda I_V$ nicht invertierbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(T - \lambda I_V) = 0$ ist, wie in der Linearen Algebra I gezeigt wurde.

b) Wir wissen nach Voraussetzung, dass A und B diagonalisierbar sind und somit $\mathbb{R}^n$ eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von A besitzt. Sei also $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A, dann ist

$$ABv = BAv = \lambda Bv$$

und somit ist Bv auch ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A. Insbesondere ist also $BE_\lambda^A \subset E_\lambda^A$ ein L_B-invarianter Unterraum, wobei E_λ^A der Eigenraum für A zum Eigenwert λ ist. Da E_λ^A ein B-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, teilt das charakteristische Polynom von $L_B|_{E_\lambda^A}$ das charakteristische Polynom von L_B. Da B diagonalisierbar ist, zerfällt das charakteristische Polynom von L_B über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren. Also zerfällt das charakteristische Polynom von $L_B|_{E_\lambda^A}$ in Linearfaktoren. Das heisst, $L_B|_{E_\lambda^A}$ (und somit B) besitzt einen Eigenvektor in E_λ^A. Sei $v \in E_\lambda^A$ ein solcher Eigenvektor von B, dann ist per definitionem v ein Eigenvektor von A und somit ein gemeinsamer Eigenvektor von A und B.

c) Wir wissen aufgrund des Spektralsatzes für symmetrische Matrizen, dass A bezüglich einer ONB diagonalisierbar ist, d.h. es existiert $Q \in O(n)$, sodass $A = Q^T DQ$ für eine Diagonalmatrix D gilt. Da der Rang einer Matrix invariant ist unter Rechts- und Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen, ist

$$1 = \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(Q^T DQ) = \mathrm{Rang}(DQ) = \mathrm{Rang}(D)$$

und da D diagonal ist, besitzt D also genau einen von null verschiedenen Diagonaleintrag λ.

Bitte wenden!

Wir bemerken, dass

$$I_n + A = I_n + Q^T DQ = Q^T (I_n + D)Q,$$

da $Q^T Q = I_n$ ist. Es folgt

$$\det(I_n + A) = \det(I_n + D) = 1 + \lambda = 1 + \mathrm{Spur}(D) = 1 + \mathrm{Spur}(A),$$

da $\det$ und Spur invariant sind unter Ähnlichkeit und weil die Determinante der Diagonalmatrix $I_n + D$ das Produkt der Diagonaleinträge – in diesem Fall also einmal $1 + \lambda$ und $n - 1$-mal 1 – ist.

3. *(15 Punkte)*

a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $S \subset V$ eine nicht-leere Teilmenge, deren Elemente alle von 0 verschieden und paarweise orthogonal sind. Dann ist S linear unabhängig.

b) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass alle Eigenwerte der Abbildung $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ von der Form αi für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ sind. Zeigen Sie, dass $I_n + A$ und $I_n - A$ invertierbar sind.

c) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch. Zeigen Sie, dass die Matrix $I_n + A$ invertierbar und dass $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ orthogonal ist.

Lösung

a) Seien $v_1, \dots, v_n \in S$ paarweise verschieden und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$0 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Dann gilt für alle $1 \le i \le n$

$$0 = \langle v_i, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2$$

unter Verwendung der Bilinearität der Abbildung $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ und der Orthogonalität der geordneten Menge $(v_1, \dots, v_n)$. Da die Elemente von S alle von 0 verschieden sind, gilt $\|v_i\|^2 = \langle v_i, v_i \rangle \neq 0$ wegen der Positivität des inneren Produkts. Folglich ist $\alpha_i = 0$. Da i beliebig war, folgt, dass die Linearkombination trivial war. Dies impliziert die lineare Unabhängigkeit von S.

b) $I_n + A$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(I_n + A) \neq 0$. Andererseits ist $\det(I_n + A) = \mathrm{char}_A(-1)$ und somit ist $\det(I_n + A) = 0$ genau dann, wenn -1 ein Eigenwert von A ist. Analog ist $\det(I_n - A) = (-1)^n \det(A - I_n) = (-1)^n \mathrm{char}_A(1)$ und somit ist $\det(I_n - A) = 0$ genau dann, wenn 1 ein Eigenwert von A ist. Da nach Voraussetzung weder 1 noch -1 Eigenwerte von A sind, folgt die Behauptung.

c) Da jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, besitzt A zu jeder Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Es ist $A^* = -A$ nach Voraussetzung. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das standard innere Produkt auf $\mathbb{C}^n$, dann gilt

$$\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^*v\rangle = -\langle v, Av\rangle = -\lambda\langle v, v\rangle.$$

Da $v \neq 0$ ist, folgt $\overline{\lambda} = -\lambda$ und wegen

$$\mathrm{Re}\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda}) = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda) = 0$$

ist also λ imaginär. Somit sind alle Eigenwerte von A imaginär und $I_n + A$ invertierbar. Seien $M, N \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und N invertierbar. Falls $MN = NM$, dann ist auch $MN^{-1} = N^{-1}M$. Dies folgt aus der Rechnung

$$MN^{-1} = N^{-1}NMN^{-1} = N^{-1}MNN^{-1} = N^{-1}M.$$

Insbesondere folgt auch $M^{-1}N^{-1} = N^{-1}M^{-1}$, falls $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$.
Wir berechnen mit $Q = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
QQ^T =&(I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big((I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big)^T \\
=&(I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big((I_n + A)^{-1}\big)^T(I_n - A)^T \\
=&(I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big((I_n + A)^T\big)^{-1}(I_n - A)^T \\
=&(I_n - A)(I_n + A)^{-1}(I_n^T + A^T)^{-1}(I_n^T - A^T) \\
=&(I_n - A)(I_n + A)^{-1}(I_n - A)^{-1}(I_n + A) \\
=&(I_n - A)(I_n - A)^{-1}(I_n + A)^{-1}(I_n + A) = I_n.
\end{aligned}$$

4. *(15 Punkte)* Im Folgenden sei $S_3(\mathbb{R}) \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen, symmetrischen 3×3-Matrizen.

a) Definieren Sie den Begriff Kongruenz für Matrizen in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Zeigen Sie, dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation auf $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ und auf $S_3(\mathbb{R})$ definiert.

c) Zeigen Sie, dass es auf $S_3(\mathbb{R})$ genau 10 Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation gibt.

d) Eine Matrix $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ist eine *Gram'sche* Matrix, falls $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ existiert, sodass $A = B^TB$ gilt. Zeigen Sie: $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ist genau dann eine Gram'sche Matrix, wenn A symmetrisch ist und alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.

Lösung

a) A und B sind zueinander kongruent, falls $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ existiert, sodass $B = Q^TAQ$ gilt.

Bitte wenden!

b) Es ist $I_3^T = I_3 \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ und für $Q \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ gilt $Q^T \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ wegen $\det(Q) = \det(Q^T)$ und es ist $Q^{-T} := (Q^T)^{-1} = (Q^{-1})^T$. Sei im Folgenden $M \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ eine beliebige, nicht-leere Teilmenge. Wir zeigen, dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

- Kongruenz ist reflexiv, denn für alle $A \in M$ gilt $A = I_n^T A I_n$.
- Kongruenz ist symmetrisch, denn für alle $A, B \in M$ und $Q \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ mit $B = Q^T A Q$ gilt $A = Q^{-T} B Q^{-1} = (Q^{-1})^T B Q^{-1}$.
- Kongruenz ist transitiv, denn für alle $A, B, C \in M$ folgt aus $B = Q^T A Q$ und $C = R^T B R$ für $Q, R \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, dass

$$C = R^T Q^T A Q R = (QR)^T A (QR),$$

und es ist $QR \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ für alle $Q, R \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$.

c) Wir wissen aus dem Sylvester'schen Trägheitssatz, dass jede symmetrische Matrix kongruent ist zu genau einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix},$$

wobei $0_{n-p-q} \in M_{n-p-q \times n-p-q}(\mathbb{R})$ die Matrix mit allen Einträgen gleich 0 ist. Es bleibt also nur, die Menge solcher Matrizen zu bestimmen. Das heisst, wir suchen die Menge der Tupel $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}_0^3$, sodass $n_1 + n_2 + n_3 = n$ gilt. Die Wahl von n_1 und n_2 (und somit auch von n_3) ist dasselbe, wie die Wahl zweier Trennungspunkte $1 \le k_1 < k_2 \le n+2$ zwischen 0 und $n+2$, also der Wahl einer Teilmenge mit zwei Elementen in $\{1, \ldots, n+2\}$. Es existieren $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ solche Teilmengen.

d) Falls $A = B^T B$ ist, dann ist A symmetrisch und insbesondere orthogonal diagonalisierbar. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann gilt

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle Bv, Bv \rangle \ge 0$$

und folglich ist $\lambda \ge 0$. Dies zeigt, dass jede Gram'sche Matrix symmetrisch mit nicht-negativen Eigenwerten ist.

Sei nun A symmetrisch mit nicht-negativen Eigenwerten. Nach Sylvesters Trägheitssatz ist A kongruent zu genau einer Diagonalmatrix mit Einträgen alle $1, -1$ oder 0. Andererseits ist A orthogonal diagonalisierbar, mit Diagonaleinträgen die Eigenwerte von A. Da Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist, ist insbesondere die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen gleich den Eigenwerten (mit Multiplizität) kongruent zu derselben Diagonalmatrix mit Einträgen alle $1, -1$ oder 0. Man sieht leicht, dass jede Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ kongruent ist zu $D' = \mathrm{diag}(\mathrm{sign}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{sign}(\lambda_n))$: Sei Q die Diagonalmatrix gegeben durch

$$Q_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} & \text{falls } \lambda_i > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} & \text{falls } \lambda_i < 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann ist $Q^T D Q = D'$. Da alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind, ist also A kongruent zu einer Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} I_p & \\ & 0_{n-p} \end{smallmatrix}\right)$, d.h. es existiert $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, sodass

$$A = Q^T \begin{pmatrix} I_p & \\ & 0_{n-p} \end{pmatrix} Q = Q^T \begin{pmatrix} I_p & \\ & 0_{n-p} \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & \\ & 0_{n-p} \end{pmatrix} Q}_{=B} = B^T B.$$

Dies beweist die Behauptung.

5. *(15 Punkte)*

a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in \sigma(T)$. Definieren Sie den Zyklus des verallgemeinerten Eigenvektors $v \in K_\lambda \setminus \{0\}$.

b) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: falls 0 der einzige Eigenwert von A ist, dann ist A nilpotent.

c) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ nicht nilpotent. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind ähnlich}\}$$

endlich ist.

d) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Menge

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind ähnlich}\}.$$

Lösung

a) Da v ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert λ von T ist, existiert per definitionem ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $(T - \lambda I)^k(v) = 0$. Da $v \neq 0$ ist, existiert ein minimales $p \in \mathbb{N}$, sodass $(T - \lambda I)^p(v) = 0$ und $(T - \lambda I)^{p-1}(v) \neq 0$. Der Zyklus des verallgemeinerten Eigenvektors v ist das Tupel $\gamma \in V^p$, sodass $\gamma_i = (T - \lambda I)^{p-i}(v)$ gilt.

b) Da das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, gilt $\mathrm{char}_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, wobei die λ_i die Eigenwerte (mit Multiplizität) von A über $\mathbb{C}$ sind. Da nach Voraussetzung 0 der einzige Eigenwert von A ist, folgt also $\mathrm{char}_A(X) = (-1)^n X^n$. Gemäss dem Satz von Cayley-Hamilton ist $0 = \mathrm{char}_A(A) = (-1)^n A^n$ und somit $A^n = 0$, sprich A ist nilpotent.

c) Wenn αA und A ähnlich sind, dann sind die Eigenwerte von αA und A die selben. Da A nicht nilpotent ist, ist $A \neq 0$ und somit gilt $\alpha A \sim A \Rightarrow \alpha \neq 0$. Sei nun $\alpha \neq 0$, dann ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von αA, wenn

$$0 = \det(\alpha A - \lambda I_n) = \alpha^n \det(A - \tfrac{\lambda}{\alpha} I_n)$$

und also wegen $\alpha^n \neq 0$ genau dann, wenn $\frac{\lambda}{\alpha}$ ein Eigenwert von A ist. Das heisst, es existiert ein $\mu \in \sigma(A)$, sodass $\lambda = \mu\alpha$. Da nach der vorangehenden Teilaufgabe A von 0 verschiedene Eigenwerte besitzt, ist $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, wobei λ, μ von 0 verschiedene Eigenwerte

Bitte wenden!

von A sind. Da A nur endlich viele verschiedene Eigenwerte besitzt, ist die Menge all ihrer Quotienten endlich und somit die Teilmenge

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind ähnlich}\} \subset \{\mu^{-1}\lambda \mid \mu, \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}$$

endlich.

d) Sei $n_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Falls $\alpha = 0$, d.h. $n_\alpha = 0$, dann sind n_α und A nicht ähnlich, da Ähnlichkeit den Rang invariant lässt und $\mathrm{Rang}(n_\alpha) = 0 < 1 = \mathrm{Rang}(A)$ ist. Dies zeigt

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind ähnlich}\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Wir behaupten, dass

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind ähnlich}\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

gilt. Es ist $\mathrm{char}_{n_\alpha}(X) = X^2$ und da n_α über $\mathbb{C}$ eine Jordan Normalform besitzt, ist n_α entweder ähnlich zu $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} J_{1,0} & 0 \\ 0 & J_{1,0} \end{smallmatrix}\right)$ oder zu $J_{2,0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = A$. Da für $\alpha \neq 0$ gilt $\mathrm{Rang}(n_\alpha) \neq 0$, folgt die Ähnlichkeit von $n_\alpha = \alpha A$ und $J_{2,0} = A$ und somit $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind ähnlich}\}$

6. *(15 Punkte)* Im Folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ versehen mit einem Euklidischen bzw. einem hermiteschen inneren Produkt.

a) Nehmen Sie an, dass $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum ist, und beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn $T \in \mathrm{End}(V)$ einen Eigenvektor in V besitzt, dann besitzt die adjungierte Abbildung T^* einen Eigenvektor.

b) Nehmen Sie an, dass $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum ist, und beweisen Sie dieselbe Aussage in diesem Fall.

c) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitär und sei $S \in \mathrm{End}(V)$, sodass $\langle Sv, v \rangle = 0$ gilt für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass $S = 0$ ist.

d) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Geben Sie die Definition eines selbstadjungierten Operators $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie im Anschluss, dass T genau dann selbstadjungiert ist, wenn die Adjungierte von T existiert und für alle $v \in V$ gilt

$$\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \qquad (v \in V).$$

Lösung

a) Wenn V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, dann besitzt wegen der Existenz einer Jordan Basis von V jeder Endomorphismus von V einen Eigenvektor, denn nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

b) Sei V ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist für alle $w \in V$

$$0 = \langle 0, w \rangle = \langle (T - \lambda I_V)v, w \rangle = \langle v, (T^* - \lambda I_V)w \rangle$$

und folglich ist $\mathrm{Im}(T^* - \lambda I_V) \subset v^\perp$. Insbesondere ist $T^* - \lambda I_V$ nicht surjektiv, insbesondere also nicht bijektiv, und folglich $\mathrm{Ker}(T^* - \lambda I_V) \neq \{0\}$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Man berechnet für beliebige $v, w \in V$:

$$0 = \langle S(v+\mathrm{i}w), v+\mathrm{i}w\rangle = -\mathrm{i}\langle Sw, v\rangle + \mathrm{i}\langle Sv, w\rangle$$
$$0 = \langle S(v+w), v+w\rangle = \langle Sw, v\rangle + \langle Sv, w\rangle$$

und folglich ist

$$\langle Sv, w\rangle = \langle Sw, v\rangle = -\langle Sv, w\rangle$$

und somit $\langle Sv, w\rangle = 0$ für beliebige $v, w \in V$. Insbesondere gilt also für alle $v \in V$, dass $\langle Sv, Sv\rangle = 0$ und somit ist $Sv = 0$ für alle $v \in V$ wegen der positiven Definitheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

d) T heisst selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ ist. Wenn T selbstadjungiert ist – und insbesondere die Adjungierte zu T existiert –, dann gilt für alle $v \in V$

$$\langle Tv, v\rangle = \overline{\langle v, Tv\rangle} = \overline{\langle T^*v, v\rangle} = \overline{\langle Tv, v\rangle}$$

und somit ist

$$\mathrm{Im}(\langle Tv, v\rangle) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\langle Tv, v\rangle - \overline{\langle Tv, v\rangle}) = 0.$$

Also ist $\langle Tv, v\rangle$ in $\mathbb{R}$.

Angenommen $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ gilt für alle $v \in V$. Dann ist

$$\langle (T^* - T)v, v\rangle = \langle T^*v, v\rangle - \langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle - \langle Tv, v\rangle = \overline{\langle Tv, v\rangle} - \langle Tv, v\rangle = 0.$$

Somit folgt die Aussage aus Teilaufgabe c).

7. *(15 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass jede positiv definite, symmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Cholesky-Zerlegung besitzt, d.h. es existiert eine obere Dreiecksmatrix $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass $A = R^T R$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Cholesky-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Lösung

a) Da A positiv definit, symmetrisch ist, definiert die Abbildung $(x, y) \mapsto x^T Ay$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren mit Normalisierung auf die Standardbasis $\mathcal{E}_n$ an und erhalten eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$, sodass $v_i \in \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ und $v_i^T Av_j = \delta_{ij}$ ist. Sei $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch $Q^{(j)} = v_j$. Dann ist Q eine obere Dreiecksmatrix, da $Q^{(j)} \in \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_j\}$ ist, und es gilt $Q^T AQ = I_n$ nach Voraussetzung. Sei $R = Q^{-1}$. Dann ist $R^T = (Q^{-1})^T = (Q^T)^{-1}$ und folglich $A = R^T I_n R = R^T R$ wie gewünscht.

b) Das Hauptminorenkriterium liefert die Determinanten $1, 4$ und 28. Somit ist A tatsächlich positiv definit. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf die Basis $\mathcal{E}_3$ an und erhalten eine bezüglich $(x, y) \mapsto x^T Ay$ orthogonale Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
v_1 =& e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^T A v_1 = e_1^T A e_1 = 1 \\
v_2 =& e_2 - \frac{e_2^T A v_1}{v_1^T v_1} v_1 \\
=& e_2 - \frac{e_2^T A e_1}{e_1^T A e_1} e_1 \\
=& e_2 - \frac{2}{1} e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow v_2^T A v_2 =& (-2e_1 + e_2)^T A(-2e_1 + e_2) \\
=& 4e_1^T A e_1 - 4e_1^T A e_2 + e_2^T A e_2 \\
=& 4 - 8 + 8 = 4 \\
v_3 =& e_3 - \frac{e_3^T A v_2}{v_2^T A v_2} v_2 - \frac{e_3^T A v_1}{v_1^T A v_1} v_1 \\
=& e_3 - \frac{1}{4}(-2e_3^T A e_1 + e_3^T A e_2) v_2 - e_3^T A e_1 v_1 \\
=& e_3 - \frac{1}{4}(-6 + 10) v_2 - 3v_1 \\
=& e_3 - v_2 - 3v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow v_3^T A v_3 =& (-e_1 - e_2 + e_3)^T A(-e_1 - e_2 + e_3) \\
=& e_1^T A e_1 + e_2^T A e_2 + e_3^T A e_3 + 2e_1^T A e_2 - 2e_1^T A e_3 - 2e_2^T A e_3 \\
=& 1 + 8 + 14 + 4 - 6 - 20 = 1.
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir die folgende ONB

$$
\begin{aligned}
w_1 =& \frac{1}{\sqrt{v_1^T A v_1}} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_2 =& \frac{1}{\sqrt{v_2^T A v_2}} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_3 =& \frac{1}{\sqrt{v_3^T A v_3}} v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir müssen also die Inverse $R = Q^{-1}$ der Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Gauss-Elimination liefert

$$\begin{aligned}
(Q \mid I_3) = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\xrightarrow{Z_1 \mapsto Z_1 + 2Z_2} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\xrightarrow[Z_2 \mapsto Z_2 + Z_3]{Z_1 \mapsto Z_1 + 3Z_3} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\xrightarrow{Z_2 \mapsto 2Z_2} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

und folglich ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$