# Lineare Algebra II – Sommer 2018

**1.** *(25 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!

**Bewertung:**

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

**(i)** Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ so, dass $\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 3X + 42$. Dann ist $A$ invertierbar.

**(ii)** Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$, dann hat $T$ maximal $n$ verschiedene Eigenvektoren.

**(iii)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ so, dass $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ injektiv ist. Dann ist 0 kein Eigenwert von $A$.

**(iv)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zu sich selbst ähnlich, dann gilt $A = I_n$.

**(v)** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, und $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V \setminus \{0\}$. Wenn $S$ linear unabhängig ist, dann ist $S$ orthogonal.

**(vi)** Sei $T$ eine lineare Abbildung auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum $V$ so, dass das charakteristische Polynom von $T$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist $T$ genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.

**(vii)** Jede diagonalisierbare Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ besteht aus $n$ linear unabhängigen Spaltenvektoren.

**(viii)** Sei $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{K})$ mit einem einzigen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Wenn $\lambda$ geometrische Vielfachheit 4 hat, dann ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**(ix)** Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $(A - I_2)^2 = 0$, dann ist $A$ invertierbar.

**(x)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nilpotent. Dann ist $\mathrm{tr}(A) = 0$.

**(xi)** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann besitzen $T$ und $T^*$ dieselben Eigenvektoren.

**(xii)** Sei $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und seien $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ zwei innere Produkte auf $V$. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Wenn $T$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ selbstadjungiert ist, dann ist $T$ auch bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ selbstadjungiert.

**(xiii)** Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $T$ ein orthogonaler Endomorphismus von $V$. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von $V$, dann ist $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal.

**(xiv)** Sei $A \in \mathrm{SO}(2)$ symmetrisch, so gilt $A = \pm I_2$.

**(xv)** Die Komposition zweier Rotationen auf $\mathbb{R}^3$ ist wieder eine Rotation.

**(xvi)** Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ kongruente Matrizen. Dann besitzen $A$ und $B$ dieselben Eigenwerte.

**(xvii)** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ gegeben durch $\beta : (v, w) \mapsto v^T w$. Dann ist $\beta$ nicht-ausgeartet.

**(xviii)** Sei $\beta$ eine negativ definite Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathrm{Ker}\big([\beta]_{\mathcal{B}}\big) = \{0\}$.

**(xix)** Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm und sei $Q$ eine positiv definite quadratische Form auf $V$. Dann existiert $T \in \mathrm{End}(V)$ so, dass $\|Tv\|^2 = Q(v)$ für alle $v \in V$.

**(xx)** Sei $N \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ nilpotent. Dann ist $N$ nicht diagonalisierbar.

**(xxi)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ so, dass $A$ diagonalisierbar ist. Dann ist $A$ eine normale Matrix.

**(xxii)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann ist $A$ ähnlich zu $A^*$.

**(xxiii)** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann ist $A + A^T$ diagonalisierbar.

**(xxiv)** Sei $V$ ein komplexer Vektorraum und sei

$$H = \{\gamma \in \mathrm{Ses}(V) | \forall u, v \in V : \gamma(u, v) = \overline{\gamma(v, u)}\}.$$

Dann ist $H$ ein komplexer Unterraum von $\mathrm{Ses}(V)$.

**(xxv)** Die Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ 1 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

ist unitär.

**Siehe nächstes Blatt!**

**2.** **a)** *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition von Ähnlichkeit für Matrizen wieder.

**b)** *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom besitzen.

Im Folgenden sei $J_0 \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix $A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ heisst *symplektisch*, falls $A^T J_0 A = J_0$ gilt.

**c)** *(6 Punkte)* Zeigen Sie, dass jede symplektische Matrix $A$ invertierbar ist und dass $A^{-1} = J_0^T A^T J_0$ gilt. Zeigen Sie zudem, dass $A^{-1}$ wieder eine symplektische Matrix ist.

**d)** *(4 Punkte)* Sei $A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ eine symplektische Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{\lambda}$ ebenfalls ein Eigenwert von $A$ ist.

**3.** **a)** *(4 Punkte)* Sei $V$ ein reeller Vektorraum. Geben Sie die Definition eines inneren Produktes wieder.

**b)** *(5 Punkte)* Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $Av = \lambda v$ ist. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ ist und dass $\operatorname{Re}(v)$ ein Eigenvektor von $A$ ist.

**c)** *(6 Punkte)* Sei $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die quadratische Form gegeben durch

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 21x_3^2 + 10x_1x_2 - 6x_1x_3 + 20x_2x_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die Signatur von $Q$.

**4.** **a)** *(8 Punkte)* Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $r = \operatorname{Rang}(T) > 0$. Dann existieren $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ sowie orthonormale Basen $(v_i)_{i=1}^n$ von $\mathbb{R}^n$ und $(w_i)_{i=1}^m$ von $\mathbb{R}^m$ so, dass $Tv_i = \sigma_i w_i$ für $1 \leq i \leq r$ und $v_i \in \operatorname{Ker}(T)$ sonst.

**Hinweis:** Sie dürfen verwenden, dass $\operatorname{Rang}(TT^*) = \operatorname{Rang}(T)$ gilt.

**b)** *(7 Punkte)* Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

**5.** **a)** *(4 Punkte)* Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei $T \in \operatorname{End}(V)$ und sei $\lambda$ ein Eigenwert von $T$. Definieren Sie den verallgemeinerten Eigenraum $K_\lambda$ von $T$ und beweisen Sie, dass $K_\lambda \subseteq V$ ein Unterraum ist.

**Bitte wenden!**

**b)** *(4 Punkte)* Für $T$ und $\lambda$ wie oben, sei $\mu \in \mathbb{K}$ so, dass $\mu \neq \lambda$ ist. Zeigen Sie, dass $(T - \mu \mathrm{id}_V)|_{K_\lambda}$ injektiv ist.

**c)** *(7 Punkte)* Sei $\mathbb{R}_3[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens drei. Sei $D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ gegeben durch $p \mapsto p'$. Bestimmen Sie eine Jordanbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}_3[X]$ für $D$.

**6.** Im Folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

**a)** *(4 Punkte)* Geben Sie die Definition einer unitären Abbildung auf $V$ wieder und zeigen Sie, dass jeder unitäre Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ invertierbar ist.

**b)** *(4 Punkte)* Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine normale Abbildung mit $Tv = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein $v \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $T^* v = \overline{\lambda} v$ gilt.

**c)** *(7 Punkte)* Sei gegeben der komplexe Vektorraum $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^* B) \quad (A, B \in V).$$

Sei $T : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ die lineare Abbildung gegeben durch $A \mapsto A^T$. Zeigen Sie, dass $T$ selbstadjungiert ist bezüglich obigem inneren Produkt und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $V$ bestehend aus Eigenvektoren von $T$.

*Bemerkung:* Sie müssen nicht zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt ist.