Lösung Lineare Algebra II – Sommer 2018

1. *(25 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

(i) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ so, dass $\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 3X + 42$. Dann ist A invertierbar.
Die Aussage ist wahr, denn für $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ gilt $\mathrm{char}_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$.

(ii) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$, dann hat T maximal n verschiedene Eigenvektoren.
Die Aussage ist falsch. Beispielsweise ist jedes Element in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

(iii) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ so, dass $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ injektiv ist. Dann ist 0 kein Eigenwert von A.
Die Aussage ist wahr, da $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

(iv) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zu sich selbst ähnlich, dann gilt $A = I_n$.
Die Aussage ist falsch. Jede Matrix ist zu sich selbst ähnlich.

(v) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, und $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V \setminus \{0\}$. Wenn S linear unabhängig ist, dann ist S orthogonal.
Die Aussage ist falsch. $\{(1,1), (1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein Gegenbeispiel bezüglich dem standard inneren Produkt auf $\mathbb{R}^2$.

(vi) Sei T eine lineare Abbildung auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V so, dass das charakteristische Polynom von T in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist T genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.
Die Aussage ist wahr, dies ist ein Satz aus der Vorlesung und wurde dort bewiesen.

(vii) Jede diagonalisierbare Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ besteht aus n linear unabhängigen Spaltenvektoren.
Die Aussage ist falsch. Die Nullmatrix ist diagonal.

(viii) Sei $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{K})$ mit einem einzigen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Wenn λ geometrische Vielfachheit 4 hat, dann ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Aussage ist wahr, denn A ist ähnlich zu λI_4 und λI_4 kommutiert mit allen Elementen von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{K})$.

(ix) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $(A - I_2)^2 = 0$, dann ist A invertierbar.
Die Aussage ist wahr, denn $A(2I_2 - A) = I_2$ und somit ist $2I_2 - A$ eine Inverse von A.

(x) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nilpotent. Dann ist $\mathrm{tr}(A) = 0$.
Die Aussage ist wahr. Über $\mathbb{C}$ ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform. Da A nilpotent ist, wissen wir aus den Serien, dass die zugehörige Jordan Normalform eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, d.h. alle Diagonaleinträge sind gleich 0. Da die Spur eine Klassenfunktion ist, folgt $\mathrm{tr}(A) = 0$.

(xi) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.
Alle Eigenvektoren von $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sind skalare Vielfache von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, und alle Eigenvektoren von $U^T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sind skalare Vielfache von $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Aussage ist also falsch.

(xii) Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und seien $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ zwei innere Produkte auf V. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Wenn T bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ selbstadjungiert ist, dann ist T auch bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ selbstadjungiert.
Sei J eine symmetrische, positiv definite Matrix. Eine Matrix A ist genau dann selbstadjungiert bezüglich dem durch J induzierten inneren Produkt, wenn $A^T = JAJ^{-1}$ gilt. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ das standard innere Produkt auf $\mathbb{R}^2$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ das innere Produkt induziert durch $J = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Eine Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist genau dann selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, wenn sie symmetrisch ist. Sei $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist A also selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, aber $JAJ^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -8b & 21b \\ -3b & 8b \end{smallmatrix}\right) \neq A^T$ und somit ist A nicht selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Die Aussage ist also falsch.

(xiii) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und sei T ein orthogonaler Endomorphismus von V. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V, dann ist $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal.
Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei das innere Produkt induziert durch eine symmetrische, positiv definite Matrix J. Eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ erhält das innere Produkt genau dann, wenn $A^T J = JA^{-1}$ gilt. Angenommen, die Darstellunsmatrix von L_A bezüglich der Standardbasis ist orthogonal, dann folgt $JA = AJ$ und somit ist die Aussage im allgemeinen falsch.

Hierfür zeigen wir, dass die Darstellungsmatrix von L_A bezüglich der Standardbasis (also A) und für das induzierte innere Produkt definiert durch $J = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ im Allgemeinen nicht orthogonal ist. Sei A eine orthogonale Matrix, die das durch J definierte innere Produkt erhält, dann gilt $AJ = JA$ und somit ist A eine diagonale Matrix. Es existieren nur vier orthogonale Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, deren Einträge abseits der Diagonalen alle gleich null sind.

Sei nun Q eine orthogonale Matrix und sei $B = \sqrt{J}$ die eindeutige symmetrische, positiv definite Quadratwurzel von J, dann erhält $A = B^{-1}QB$ das durch J induzierte innere Produkt, denn

$$A^T JA = BQ^T B^{-1} JB^{-1} QB = BQ^T QB = B^2 = J.$$

Siehe nächstes Blatt!

Also erhält jedes Element im Bild der Abbildung $\mathrm{O}(2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $Q \mapsto B^{-1}QB$ das durch J induzierte innere Produkt. Da B invertierbar ist, ist die Abbildung injektiv, und da $O(2)$ nicht endlich ist, ist also auch die Menge der Matrizen, die das durch J induzierte innere Produkt erhält, nicht endlich und insbesondere nicht gleich vier. Somit ist der Beweis vollständig.

(xiv) Sei $A \in \mathrm{SO}(2)$ symmetrisch, so gilt $A = \pm I_2$.
Sei $A \in \mathrm{SO}(2)$ symmetrisch. Wegen $\det(A) = 1$ ist A eine Rotation, und somit bis auf orthogonalen Basiswechsel ähnlich zu einer Matrix B der Form

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wegen der Symmetrie von A und weil orthogonale Basiswechsel Symmetrie erhalten, ist $\sin\varphi = 0$ und somit $\varphi \in \{0, \pi\}$. Also ist $B = \pm I_2$ und weil $\pm I_2$ nur nur zu sich selber ähnlich sind, folgt die Behauptung.

(xv) Die Komposition zweier Rotationen auf $\mathbb{R}^3$ ist wieder eine Rotation.
Die Aussage ist wahr. Seien T_1, T_2 Rotationen auf $\mathbb{R}^3$ und sei $T = T_2 \circ T_1$. Aufgrund der Klassifikation orthogonaler Abbildungen wissen wir, dass eine orthonormale Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ existiert, für welche

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ ist. Da T_1 und T_2 Rotationen sind, gilt $\det(T_1) = \det(T_2) = 1$, was in der Vorlesung bzw. in den Serien gezeigt wurde. Insbesondere ist also $\det(T) = 1$ und somit

$$1 = \det(T) = \det([T]_{\mathcal{B}}) = \varepsilon\big((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\big) = \varepsilon.$$

Es folgt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und somit ist T eine Rotation, denn $T|_{\mathrm{span}\{v_2, v_3\}}$ ist eine Rotation um Winkel φ und es gilt $T|_{\mathrm{span}\{v_2,v_3\}^\perp} = \mathrm{id}_{\mathrm{span}\{v_2,v_3\}^\perp}$.

(xvi) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ kongruente Matrizen. Dann besitzen A und B dieselben Eigenwerte.
Die Matrizen I_2 und $25I_2$ sind kongruent als Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, aber die Eigenwerte sind verschieden.

(xvii) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ gegeben durch $\beta : (v, w) \mapsto v^T w$. Dann ist β nicht-ausgeartet.
Sei $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann existiert ein $1 \leq i \leq n$ so, dass $v_i \neq 0$. Es ist $\beta(v, e_i) = v_i \neq 0$ und die Aussage korrekt.

Bitte wenden!

(xviii) Sei β eine negativ definite Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathrm{Ker}\big([\beta]_{\mathcal{B}}\big) = \{0\}$.
Da β negativ definit ist, besitzt β Signatur $(0, n, 0)$ und somit ist jede Darstellunsmatrix von β invertierbar. Es folgt die Aussage.

(xix) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm und sei Q eine positiv definite quadratische Form auf V. Dann existiert $T \in \mathrm{End}(V)$ so, dass $\|Tv\|^2 = Q(v)$ für alle $v \in V$.
Nach dem Satz von Sylvester ist die Darstellungsmatrix von Q (bezüglich jeder Basis von V) kongruent zu I_n. Da $\|\cdot, \cdot\|$ ein inneres Produkt ist, existiert nach dem Gram-Schmidt Algorithmus eine Basis von V, bezüglich der die Darstellungsmatrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Identität ist. Somit sind die Darstellungsmatrizen des inneren Produktes und von Q bezüglich dieser Basis kongruent, und es folgt die Behauptung.

(xx) Sei $N \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ nilpotent. Dann ist N nicht diagonalisierbar.
Die Nullmatrix ist nilpotent und diagonalisierbar.

(xxi) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ so, dass A diagonalisierbar ist. Dann ist A eine normale Matrix.
Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Man überprüft leicht, dass $A^*A \neq AA^*$. A ist nach Konstruktion diagonalisierbar. Die Aussage ist also falsch.

(xxii) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann ist A ähnlich zu A^*.
Die Aussage ist falsch. Die Matrix $\mathbf{i}I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ hat Eigenwerte alle gleich $\mathbf{i}$. Es ist $(\mathbf{i}I_n)^* = -\mathbf{i}I_n$, und somit sind alle Eigenwerte von $(\mathbf{i}I_n)^*$ gleich $-\mathbf{i}$. Da ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte besitzen, sind $\mathbf{i}I_n$ und $(-\mathbf{i}I_n)^*$ nicht ähnlich.

(xxiii) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann ist $A + A^T$ diagonalisierbar.
Die Aussage folgt aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Matrizen, da $A + A^T$ symmetrisch ist. Die Aussage ist also wahr.

(xxiv) Sei V ein komplexer Vektorraum und sei

$$H = \{\gamma \in \mathrm{Ses}(V) | \forall u, v \in V : \gamma(u, v) = \overline{\gamma(v, u)}\}.$$

Dann ist H ein komplexer Unterraum von $\mathrm{Ses}(V)$.
Sei $\gamma : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(s, t) = \overline{s}t$. Dann ist γ eine hermitesche Sesquilinearform, aber $\mathbf{i}$ ist nicht hermitesch, denn es gilt $\mathbf{i} = (\mathbf{i}\gamma)(1, 1) \neq \overline{(\mathbf{i}\gamma)(1, 1)} = -\mathbf{i}$.

(xxv) Die Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ 1 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

ist unitär.
Es ist $A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -\mathbf{i} & 1 \\ 1 & -\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right)$, und somit $A^*A = I_2$. Die Aussage ist also wahr.

Siehe nächstes Blatt!

Schlüssel zur MC-Prüfung

Aufgabe	T/F
i	T
ii	F
iii	T
iv	F
v	F
vi	T
vii	F
viii	T
ix	T
x	T
xi	F
xii	F
xiii	F
xiv	T
xv	T
xvi	F
xvii	T
xviii	T
xix	T
xx	F
xxi	F
xxii	F
xxiii	T
xxiv	F
xxv	T

Bitte wenden!

2. **a)** *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition von Ähnlichkeit für Matrizen wieder.

b) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom besitzen.

Im Folgenden sei $J_0 \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix $A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ heisst *symplektisch*, falls $A^T J_0 A = J_0$ gilt.

c) *(6 Punkte)* Zeigen Sie, dass jede symplektische Matrix A invertierbar ist und dass $A^{-1} = J_0^T A^T J_0$ gilt. Zeigen Sie zudem, dass A^{-1} wieder eine symplektische Matrix ist.

d) *(4 Punkte)* Sei $A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ eine symplektische Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{\lambda}$ ebenfalls ein Eigenwert von A ist.

Lösung:

a) Zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ sind ähnlich, falls eine Matrix $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, für welche $A = QBQ^{-1}$ gilt.

b) Seien A, B und Q wie oben, dann ist

$$\begin{aligned}\det(B - XI_n) &= \det(QAQ^{-1} - XQQ^{-1}) \\ &= \det\left(Q(A - XI_n)Q^{-1}\right) \\ &= \det(Q)\det(A - XI_n)\det(Q^{-1}) = \det(A - XI_n).\end{aligned}$$

c) J_0 ist invertierbar mit $J_0^{-1} = -J_0 = J_0^T$. Sei A symplektisch, dann gilt also $J_0^T A^T J_0 A = I_{2n}$ und somit ist A invertierbar und $J_0^T A^T J_0$ ist die Inverse.

Es bleibt zu zeigen, dass die Inverse symplektisch ist. Es gilt

$$(J_0^T A^T J_0)^T J_0 (J_0^T A^T J_0) = J_0^T A J_0 A^T J_0$$

und somit reicht es zu zeigen, dass für alle symplektischen Matrizen A auch A^T symplektisch ist. Hierfür bemerken wir, dass aus der Definition symplektischer Matrizen folgt $J_0 A = A^{-T} J_0$, wobei $A^{-T} = (A^{-1})^T$ ist. Somit gilt also

$$AJ_0A^T J_0^{-1} = AJ_0(J_0A)^T = AJ_0(A^{-T}J_0)^T = AJ_0J_0^T A^{-1} = I_{2n}$$

und somit $AJ_0A^T = J_0$. Also ist A^T symplektisch, wann immer A symplektisch ist.

d) Wir wissen aus Serie 14, dass λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist. Hierfür kann man alternativ auch die Jordan Normalform verwenden. Nach vorangehender Überlegung ist A^{-1} ähnlich zu A^T und somit ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^T. Da A^T und A (über $\mathbb{C}$) ähnlich sind, besitzen A und A^T dasselbe charakteristische Polynom und somit ist λ^{-1} ein Eigenwert von A.

3. **a)** *(4 Punkte)* Sei V ein reeller Vektorraum. Geben Sie die Definition eines inneren Produktes wieder.

b) *(5 Punkte)* Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $Av = \lambda v$ ist. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ ist und dass $\mathrm{Re}(v)$ ein Eigenvektor von A ist.

c) *(6 Punkte)* Sei $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die quadratische Form gegeben durch

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 21x_3^2 + 10x_1x_2 - 6x_1x_3 + 20x_2x_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die Signatur von Q.

Lösung:

a) Ein inneres Produkt auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ so, dass folgende gelten:

1. *(Linearität im 1. Argument)* Für alle $u_1, u_2, v \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\langle u_1 + \lambda u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \lambda\langle u_2, v\rangle$.
2. *(Positive Definitheit)* Für alle $v \in V$ gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $v = 0$ ist.
3. *(Symmetrie)* Für alle $u, v \in V$ gilt $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

b) Da A symmetrisch ist, gilt $A^* = A$ bezüglich dem standard inneren Produkt auf $\mathbb{C}^n$ und somit

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle Av, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

und wegen $\langle v, v\rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \overline{\lambda}$, sprich $\lambda \in \mathbb{R}$.

Da A reellwertig und $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Ringhomomorphismus ist, folgt

$$A\mathrm{Re}(v) = \tfrac{1}{2}(Av + A\overline{v}) = \tfrac{1}{2}(Av + \overline{Av}) = \tfrac{1}{2}(\lambda v + \overline{\lambda v}) = \tfrac{\lambda}{2}(v + \overline{v}) = \lambda\mathrm{Re}(v).$$

Alternativ verwendet man, dass Re und Im $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind und insbesondere für reelle A gilt $\mathrm{Re}(Av) = A\mathrm{Re}(v)$ und analog für Im.

c) Die Darstellungsmatrix von Q ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & 10 \\ -3 & 10 & -21 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$A \xrightarrow[Z_3+3Z_1]{Z_2-5Z_1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -20 & 25 \\ 0 & 25 & -30 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+\frac{5}{4}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -20 & 25 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

und da Zeilenumformungen Linksmultiplikation mit Elementarmatrizen entspricht, liefert die entsprechende Rechtsmultiplikation, d.h. Anwendung der analogen Spaltenumformungen, dass A kongruent ist zu

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Da die Signatur nach dem Trägheitssatz von Sylvester unabhängig ist von der Wahl des Repräsentanten einer Kongruenzklasse, ist die Signatur von A also die Signatur von $\tilde{A}$ und somit gleich $(2, 1, 0)$.

4. a) *(8 Punkte)* Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $r = \operatorname{Rang}(T) > 0$. Dann existieren $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ sowie orthonormale Basen $(v_i)_{i=1}^n$ von $\mathbb{R}^n$ und $(w_i)_{i=1}^m$ von $\mathbb{R}^m$ so, dass $Tv_i = \sigma_i w_i$ für $1 \leq i \leq r$ und $v_i \in \operatorname{Ker}(T)$ sonst.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\operatorname{Rang}(TT^*) = \operatorname{Rang}(T)$ gilt.

b) *(7 Punkte)* Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Lösung:

a) Die Abbildung TT^* ist selbstadjungiert, positiv semidefinit, und folglich existiert eine ONB $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ von $\mathbb{R}^m$ bestehend aus Eigenvektoren von TT^*. Sei λ_i der zu w_i gehörige Eigenwert. Unter Verwendung des Hinweises permutieren wir die Elemente der Basis so, dass $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_m$. Definiere $\tilde{v}_i = T^* w_i$ für $1 \leq i \leq r$. Beachte, dass $\tilde{v}_i \neq 0$, da $T v_i = \lambda_i w_i \neq 0$. Seien $1 \leq i, j \leq r$, dann gilt

$$\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_j \rangle = \langle T^* w_i, T^* w_j \rangle = \lambda_i \langle w_i, w_j \rangle,$$

und folglich ist die Menge $\{v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \tilde{v}_i | 1 \leq i \leq r\}$ orthonormal (und insbesondere linear unabhängig). Nach der Dimensionsformel gilt $\operatorname{nullity}(T) = n - r$. Sei $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ eine ONB von $\operatorname{Ker}(T)$, dann ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$. Sei nämlich $v \in \operatorname{Ker}(T)$ und $1 \leq i \leq r$, dann ist

$$\langle v, v_i \rangle = \langle Tv, w_i \rangle = 0,$$

und somit $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_r\} \cap \operatorname{Ker}(T) = \{0\}$, sodass aus der Dimensionsformel folgt

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_r\} \oplus \operatorname{Ker}(T).$$

Es ist $Tv_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} T\tilde{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} TT^* w_i = \sigma_i w_i$ für alle $1 \leq i \leq r$, wobei $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, und $Tv_i = 0$ wann immer $r < i \leq n$.

b) Wir wählen die Basen $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = \big(v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4), v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4)\big)$ von $\mathbb{R}^4$. Es ist klar, dass $\mathcal{C}$ eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von AA^T zum einzigen Eigenwert 2 ist. Somit besitzt A die Singulärwerte $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0)$ nach der Dimensionsformel. Seien $1 \leq i, j, k, l \leq 4$, dann ist

$$\tfrac{1}{2}(e_i \pm e_j)^T(e_k \pm e_l) = \tfrac{1}{2}(e_i^T e_k \pm e_j^T e_k \pm e_i^T e_l \pm e_j e_l) = \tfrac{1}{2}(\delta_{ik} \pm \delta_{jk} \pm \delta_{il} \pm \delta_{jl})$$

und nach einsetzen der Indizes wie in der Basis $\mathcal{B}$ folgt also, dass $\mathcal{B}$ eine orthonormale Menge der Kardinalität vier, und somit eine ONB von $\mathbb{R}^4$ ist.

Es gilt

$$L_A v_1 = \sqrt{2}e_1, \quad L_A v_2 = \sqrt{2}e_2, \quad L_A v_3 = 0, \quad L_A v_4 = 0,$$

wie gewünscht.

Alternativ berechnet man $AA^T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und findet die ONB e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$. Seien $\tilde{v}_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$ und $v_2 = \frac{1}{2}(e_2 + e_4)$, dann ist $A\tilde{v}_1 = e_1$ und $A\tilde{v}_2 = e_2$. Das Glechungssystem $Av = 0$ liefert beispielsweise die Basis $\{e_1 - e_3, e_2 - e_4\}$ von $\mathrm{Ker}(A)$, und nach Normalisierung ist also

$$\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4) \right\}$$

eine ONB von $\mathbb{R}^4$ wie gewünscht und bereits oben überprüft.

5. **a)** *(4 Punkte)* Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei λ ein Eigenwert von T. Definieren Sie den verallgemeinerten Eigenraum K_λ von T und beweisen Sie, dass $K_\lambda \subseteq V$ ein Unterraum ist.

b) *(4 Punkte)* Für T und λ wie oben, sei $\mu \in \mathbb{K}$ so, dass $\mu \neq \lambda$ ist. Zeigen Sie, dass $(T - \mu \mathrm{id}_V)|_{K_\lambda}$ injektiv ist.

c) *(7 Punkte)* Sei $\mathbb{R}_3[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens drei. Sei $D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ gegeben durch $p \mapsto p'$. Bestimmen Sie eine Jordanbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}_3[X]$ für D.

Lösung:

a) Es ist

$$K_\lambda = \{v \in V | \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda \mathrm{id}_V)^k(v) = 0\}.$$

Es gilt sicher $0 \in K_\lambda$, und somit reicht es, zu zeigen, dass für alle $u, v \in K_\lambda$ und für alle $\mu \in \mathbb{K}$ gilt $u + \mu v \in K_\lambda$. Wähle hierfür $k, l \in \mathbb{N}$ so, dass $(T - \lambda \mathrm{id}_V)^k(u) = 0 = (T - \lambda \mathrm{id}_V)^l(v)$. Dann ist

$$\begin{aligned}(T - \lambda \mathrm{id}_V)^{k+l}(u + \mu v) &= (T - \lambda \mathrm{id}_V)^l\big((T - \lambda \mathrm{id}_V)^k(u)\big) \\ &\quad + \mu(T - \lambda \mathrm{id}_V)^k\big((T - \lambda \mathrm{id}_V)^l(v)\big) = 0\end{aligned}$$

und somit $u + \mu v \in K_\lambda$. Also ist K_λ ein Unterraum.

Bitte wenden!

b) Angenommen $v \in \mathrm{Ker}(T - \mu \mathrm{id}_V) \cap K_\lambda$ von 0 verschieden. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $(T - \lambda \mathrm{id}_V)^k(v) = 0$ und $(T - \lambda \mathrm{id}_V)^{k-1}(v) \neq 0$. Da $T - \lambda \mathrm{id}_V$ und $T - \mu \mathrm{id}_V$ kommutieren, gilt für $u = (T - \lambda \mathrm{id}_V)^{k-1}(v)$, dass $0 = (T - \lambda \mathrm{id}_V)(u) = (T - \mu \mathrm{id}_V)(u)$ und folglich

$$\lambda u = Tu = \mu u.$$

Da $u \neq 0$ und $(\lambda - \mu)u = 0$, folgt $\lambda = \mu$. Das ist ein Widerspruch.

c) Wir zeigen, dass die geordnete Basis $\mathcal{B} = (p_0 = 1, p_1 = X, p_2 = \frac{1}{2}X^2, p_4 = \frac{1}{6}X^3)$ eine Jordan Basis für D ist. Tatsächlich ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}_3[X]$, da für jedes Polynom $p = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ gilt

$$p = a_0 + a_1 p_1 + 2a_2 p_2 + 6a_3 p_3,$$

d.h. $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem der Kardinalität $4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$.

Es gilt

$$Dp_3 = p_2, \quad Dp_2 = p_1, \quad Dp_1 = p_0, \quad Dp_0 = 0$$

und somit

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist $[D]_{\mathcal{B}}$ in Jordan Normalform. Per definitionem ist also $\mathcal{B}$ eine Jordan Basis für D.

Alternativ sei $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ die Monombasis von $\mathbb{R}_3[X]$. Dann ist

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und somit $\mathrm{char}_D(X) = X^4$. Also ist 0 der einzige Eigenwert von D. Sei $v = (x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4$, dann ist

$$[D]_{\mathcal{B}} v = \begin{pmatrix} y \\ 2z \\ 3t \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist $\mathrm{Ker}(D) = \mathbb{R}_0[X]$ eindimensional. Es existiert also eine Jordanbasis von D zu einem Zyklus mit Endvektor 1. Es gilt $Dp = 1$ und da der affine Lösungsraum eindimensional ist, ist X das eindeutige Element in $\mathbb{R}_4[X]$ mit $Dp = 1$. Analog ist $p = \frac{1}{2}X^2$ das eindeutige Element mit $Dp = X$ und $p = \frac{1}{6}X^3$ das eindeutige Element mit $Dp = \frac{1}{2}X^2$. Also liefert der Zyklus $(1, X, \frac{1}{2}X^2, \frac{1}{6}X^3)$ eine Jordanbasis wie gewünscht.

6. Im Folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

Siehe nächstes Blatt!

a) *(4 Punkte)* Geben Sie die Definition einer unitären Abbildung auf V wieder und zeigen Sie, dass jeder unitäre Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ invertierbar ist.

b) *(4 Punkte)* Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine normale Abbildung mit $Tv = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein $v \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $T^*v = \overline{\lambda}v$ gilt.

c) *(7 Punkte)* Sei gegeben der komplexe Vektorraum $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^*B) \quad (A, B \in V).$$

Sei $T : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ die lineare Abbildung gegeben durch $A \mapsto A^T$. Zeigen Sie, dass T selbstadjungiert ist bezüglich obigem inneren Produkt und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von T.

Bemerkung: Sie müssen nicht zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein inneres Produkt ist.

Lösung:

a) Ein Operator T auf einem unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist unitär, falls $\langle Tv, Tu\rangle = \langle u, v\rangle$ gilt für alle $u, v \in V$. Sei nun $T \in \mathrm{End}(V)$ unitär. Wir zeigen, dass T injektiv ist. Sei also $u \in V \setminus \{0\}$, dann gilt wegen der positiven Definitheit des inneren Produkts $0 \neq \langle u, u\rangle = \langle Tu, Tu\rangle$, und wegen der Linearität im zweiten Argument ist also $Tu \neq 0$. Also ist T injektiv und somit bijektiv, da V nach Voraussetzung endlichdimensional ist.

b) Man berechnet

$$\begin{aligned}
0 &= \|Tv - \lambda v\|^2 \\
&= \langle Tv, Tv\rangle - \langle \lambda v, Tv\rangle - \langle Tv, \lambda v\rangle + \langle \lambda v, \lambda v\rangle \\
&= \langle T^*v, T^*v\rangle - \overline{\lambda}\langle T^*v, v\rangle - \lambda\langle v, T^*v\rangle + \overline{\lambda}\lambda\langle v, v\rangle \\
&= \langle T^*v, T^*v\rangle - \overline{\lambda}\langle T^*v, v\rangle - \lambda\langle v, T^*v\rangle + \overline{\lambda}\lambda\langle v, v\rangle \\
&= \langle T^*v, T^*v\rangle - \langle T^*v, \overline{\lambda}v\rangle - \langle \overline{\lambda}v, T^*v\rangle + \langle \overline{\lambda}v, \overline{\lambda}v\rangle \\
&= \|T^*v - \overline{\lambda}v\|^2.
\end{aligned}$$

Somit folgt $T^*v = \overline{\lambda}v$ aus der positiven Definitheit von $\|\cdot\|$.

c) Seien $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, dann ist

$$\langle A, B^T\rangle = \mathrm{tr}(A^*B^T) = \overline{\mathrm{tr}(A^TB^*)} = \overline{\mathrm{tr}(B^*A^T)} = \overline{\langle B, A^T\rangle} = \langle A^T, B\rangle,$$

und somit ist T selbstadjungiert. Seien

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind $E_{1,1}$ und $E_{2,2}$ Eigenvektoren von T zum Eigenwert 1 und wegen $E_{1,1}^*E_{1,1} = E_{1,1}$, $E_{2,2}^*E_{2,2} = E_{2,2}$ und $E_{1,1}^*E_{2,2} = 0$ ist $\{E_{1,1}, E_{2,2}\}$ eine linear unabhängige, orthonormale Menge bestehend aus Eigenvektoren von T. Man beachte, dass $\{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}+$

$E_{2,1}, E_{1,2} - E_{2,1}\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist, und $E_{1,2} + E_{2,1}$ sowie $E_{1,2} - E_{2,1}$ ebenfalls Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 und -1 sind. Wegen

$$\begin{aligned}
\langle E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,2} + E_{2,1}\rangle &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0,\\
\langle E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,1}\rangle &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0,\\
\langle E_{1,2} - E_{2,1}, E_{2,2}\rangle &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0,\\
\langle E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,1}\rangle &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0,\\
\langle E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2}\rangle &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

ist also $\{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,2}-E_{2,1}\}$ also eine orthogonale Basis von $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ bestehend aus Eigenvektoren von T. Es gilt $(E_{1,2} - E_{2,1})^*(E_{1,2} - E_{2,1}) = (E_{1,2} = E_{2,1})^*(E_{1,2} = E_{2,1}) = I_2$ und wegen $\operatorname{tr}(I_2) = 2$ ist also

$$\{E_{1,1}, E_{2,2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2} + E_{2,1}), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2} - E_{2,1})\}$$

eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren von $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.