Lineare Algebra II – Winter 2018 (Lösung)

1. *(25 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

(i) Jede reelle 2018×2018 Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.
Die Aussage ist falsch. Sei $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ die Rotation um $\frac{\pi}{2}$, dann hat A keinen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$ und insbesondere also keinen reellen Eigenwert. Die Blockdiagonalmatrix $B \in M_{2008\times 2008}(\mathbb{R})$ mit 1009 Kopien von A auf der Diagonalen hat das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_B(X) = \mathrm{char}_A(X)^{1009}$ und somit hat B keinen reellen Eigenwert.

(ii) Sei A eine Matrix mit $\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 3X$, so ist A invertierbar.
Die Aussage ist falsch, da der konstante Term des charakteristischen Polynoms mit der Determinanten übereinstimmt.

(iii) Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenvektoren.
Die Aussage ist falsch. Sei $A = QBQ^{-1}$ für $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dann ist v ein Eigenvektor von B genau dann, wenn Qv ein Eigenvektor von A ist. Dies liefert das gewünschte Gegenbeispiel. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist v genau dann ein Eigenvektor von A, wenn $v \in (\mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2) \setminus \{0\}$. Sei Q die Rotation in der reellen Ebene um $\frac{\pi}{4}$ um den Ursprung, und sei $B = Q^{-1}AQ$. Ein Vektor v ist also ein Eigenvektor von B genau dann, wenn Qv ein Eigenvektor von A ist, also genau dann wenn $v \in \big(\mathbb{R}(e_1 - e_2) \cup \mathbb{R}(e_1 + e_2)\big) \setminus \{0\}$ ist. Insbesondere sind alle Eigenvektoren von B keine Eigenvektoren von A.

(iv) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei char_T das charakteristische Polynom von T. Dann gilt $\mathrm{char}_T(T) = 0$.
Die Aussage ist wahr. Dies ist der Satz von Cayley-Hamilton.

(v) Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.
Die Aussage ist falsch. Die Rotation in der reellen Ebene um den Ursprung um $\frac{\pi}{2}$ ist nicht diagonalisierbar, aber sicherlich invertierbar.

(vi) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sodass AB nilpotent ist, aber BA nicht nilpotent ist.
Die Aussage ist falsch. Sei $(AB)^n = 0$, dann ist $(BA)^{n+1} = B(AB)^n A = 0$.

(vii) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $S \subset V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = S$.
Die Aussage ist falsch. Für jede Menge $X \subseteq V$ ist $X^\perp$ ein Unterraum. Die Menge S aus der Fragestellung ist nicht unbedingt ein Unterraum.

(viii) Sei V ein euklidischer Vektorraum, sei W ein Unterraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls W T-invariant ist, dann ist $W^\perp$ auch T-invariant.
Die Aussage ist falsch. Sei $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $W = \mathbb{R}e_1$ ein T-invarianter Unterraum, aber $W^\perp = \mathbb{R}e_2$ ist nicht T-invariant, da $Te_2 = e_1 + e_2 \notin W^\perp$.

(ix) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei T ein Endomorphismus auf V. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.
Sei $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $T^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und beide haben genau einen Eigenvektor. e_1 ist ein Eigenvektor von T, aber $T^*e_1 = e_1 + e_2$ und somit ist e_1 kein Eigenvektor von T^*. Die Aussage ist also falsch.

(x) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine selbstadjungierte Abbildung. So gilt $\dim \mathrm{Ker}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T^2)$.
Wir haben in einer Serie gezeigt, dass $\mathrm{Ker}(T^*T) = \mathrm{Ker}(T)$ gilt. Insbesondere ist in diesem Fall also $\mathrm{Ker}(T^2) = \mathrm{Ker}(T)$ und die Aussage somit richtig. Um die Aussage aus der Serie zu beweisen, bemerken wir zuerst, dass $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^*T)$ gilt. Sei andererseits $w \in \mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T^*)$. Dann gilt insbesondere

$$0 = \langle T^*w, v \rangle = \langle w, Tv \rangle$$

für alle $v \in V$ und somit ist $w \in \mathrm{Im}(T)^\perp$. Da $\mathrm{Im}(T)^\perp \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$ ist, folgt $w = 0$. Dies zeigt, dass $Tv \in \mathrm{Ker}(T^*) \implies v \in \mathrm{Ker}(T)$ und somit ist $\mathrm{Ker}(T^*T) = \mathrm{Ker}(T)$.

(xi) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zwei selbstadjungierte Matrizen. Dann ist $AB - BA$ ebenfalls selbstadjungiert.
Es ist $(AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -(AB - BA)$ und somit ist $AB - BA$ genau dann selbstadjungiert, wenn A und B kommutieren. Es bleibt also zu zeigen, dass selbstadjungierte Matrizen A, B existieren, sodass $AB \neq BA$ ist. Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $BA = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Die Aussage ist also falsch.

(xii) Sei $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und $A = A^T$. Dann liegen alle Eigenwerte von A in $\{-1, 1\}$.
Da A symmetrisch ist, hat A reelle Eigenwerte. Da A unitär ist, haben alle Eigenwerte Betrag gleich 1. Aus $\mathbb{S}^1 \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$ folgt die Behauptung.

(xiii) Jede orthogonale Abbildung ist diagonalisierbar.
Die Rotation in der reellen Ebene um den Ursprung um $\frac{\pi}{2}$ ist eine orthogonale Abbildung, die keinen Eigenvektor besitzt. Insbesondere ist sie nicht diagonalisierbar.

(xiv) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Sei T ein orthogonaler Endomorphismus auf V und sei $\det(T) = -1$. Dann ist T eine Reflexion.
Die Abbildung $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ist orthogonal, hat Determinante -1, besitzt aber keinen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Insbesondere ist die Aussage also falsch.

(xv) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zwei kongruente Matrizen. Dann haben A und B dieselben Eigenwerte.
Die Aussage ist falsch. Die Matrizen $A = I_2$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ sind

kongruent. Es ist $\operatorname{char}_A(X) = (1-X)^2$ und $\operatorname{char}_B(X) = X^2 - 3X + 1$ und somit besitzt $\operatorname{char}_B(X)$ die Nullstellen $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Insbesondere gilt also $\sigma(B) \neq \{1\} = \sigma(A)$.

(xvi) Jede Bilinearform auf einem reellen Vektorraum definiert ein inneres Produkt.
Jedes innere Produkt ist positiv definit. Insbesondere ist die Nullabbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, die kein inneres Produkt definiert.

(xvii) Jedes innere Produkt auf einem reellen Vektorraum definiert eine Bilinearform.
Jedes innere Produkt ist per definitionem sesquilinear und auf reellen Vektorräumen also insbesondere bilinear.

(xviii) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist $\operatorname{tr}(A) > 0$.
Da A symmetrisch, positiv definit ist, existiert nach dem ersten Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q, sodass $A = QDQ^T$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist. Da die Spur eine Klassenfunktion ist, gilt $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) > 0$.

(xix) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist A^{-1} auch positiv definit.
Da A symmetrisch, positiv definit ist, existiert nach dem ersten Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q, sodass $A = QDQ^T$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist. Es folgt $A^{-1} = QD^{-1}Q^T$ und da D^{-1} eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist, folgt die positive Definitheit von A^{-1}. Vergleiche hierzu auch Aufgabe 6.a).

(xx) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann ist A ähnlich zu A^T.
Man zeigt, dass $J_{k,\lambda} \sim J_{k,\lambda}^T$ gilt. Somit folgt die Aussage aus der Existenz der Jordan Normalform. Dies wurde in einer Serie ausführlich diskutiert.

(xxi) Alle unitären Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.
Nach dem Spektralsatz für normale Operatoren sind alle normalen Matrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Jede unitäre Matrix ist insbesondere normal und somit folgt die Aussage.

(xxii) Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$.
Das charakteristische Polynom von A ist $\operatorname{char}_A(X) = (1-X)^2$ und somit ist 1 der einzige Eigenwert von A. Wenn A diagonalisierbar wäre, dann wäre A ähnlich zu I_2, aber I_2 ist nur zu sich selber ähnlich. Die Aussage ist also falsch, da A weder über $\mathbb{R}$ noch über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

(xxiii) Für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$ und für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $u^*Av = (u^*Av)^T$.
Die Aussage ist wahr, da Transposition auf $\mathbb{C} = M_{1\times 1}(\mathbb{C})$ mit der Identität übereinstimmt.

(xxiv) Sei V ein komplexer Vektorraum. Für jede Sesquilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ gilt $\forall u \in V : \gamma(u,u) \in \mathbb{R}$.
Sei $\gamma : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(s,t) = \mathrm{i}\bar{s}t$. Dann ist γ eine Sesquilinearform, aber es gilt $\gamma(1,1) = \mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

(xxv) Jede normale Matrix ist entweder selbstadjungiert oder unitär.

$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat Determinante 2 und ist somit sicher nicht unitär. Es ist $A^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und somit ist A nicht selbstadjungiert. Die Formel für Inverse von 2×2-Matrizen impliziert $A^* = 2A^{-1}$, und folglich ist

$$A^*A = 2A^{-1}A = 2I_2 = 2AA^{-1} = AA^*$$

und A also ein Gegenbeispiel.

2. **a)** *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition der Diagonalisierbarkeit für Endomorphismen auf endlichdimensionalen Vektorräumen.

Betrachten Sie die Abbildung $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$T(p) = p(2) + p'(0)x + \big(p'(0) + \tfrac{3}{2}p''(0)\big)x^2.$$

b) *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass T diagonalisierbar ist.

c) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $P_2(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von T.

d) *(4 Punkte)* Sei $S : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ die lineare Abbildung definiert durch

$$S(1) = -2, \quad S(x) = 1 + x + x^2, \quad S(x^2) = 10 + 3x^2.$$

Zeigen Sie, dass eine Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ von $P_2(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von S und T existiert.

Lösung:

a) *(2 Punkte)* Ein Endomorphismus T eines endlichdimensionalen Vektorraumes V ist diagonalisierbar, wenn V eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ besitzt, sodass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.

b) *(5 Punkte)* Wir bestimmen die Darstellungsmatrix bezüglich der Monombasis $\mathcal{B}_0 = (1, x, x^2)$: Aus

$$\begin{aligned} T(1) &= 1, \\ T(x) &= 2 + x + x^2, \\ T(x^2) &= 4 + 3x^2 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$[T]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Also ist das charakteristische Polynom von T gegeben durch

$$\begin{aligned} \operatorname{char}(T) &= \det([T]_{\mathcal{B}_0} - XI_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-X & 2 & 4 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & 3-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)\det\begin{pmatrix} 1-X & 4 \\ 0 & 3-X \end{pmatrix} = (1-X)^2(3-X). \end{aligned}$$

Wir wissen, dass T genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\mathbb{R}^3$ eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von $[T]_{\mathcal{B}}$ besitzt. Es bleibt zu zeigen, dass $\dim E_1 \geq 2$ ist, d.h. dass der Eigenwert 1 geometrische Vielfachheit 2 besitzt, denn daraus folgt

$$\dim(E_1 \oplus E_3) = \dim(E_1) + \dim(E_3) = 2 + 1 = 3$$

und somit $E_1 \oplus E_3 = V$.

Man berechnet

$$[T]_{\mathcal{B}_0} - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 - \frac{1}{2} Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist also $\operatorname{Rang}([T]_{\mathcal{B}_0} - I_3) = 1$ und somit

$$\begin{aligned} \dim E_1 &= \dim \operatorname{Ker}(T - \mathrm{id}_{P_2(\mathbb{R})}) \\ &= \dim \operatorname{Ker}([T - \mathrm{id}_{P_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}_0}) \\ &= \dim \operatorname{Ker}([T]_{\mathcal{B}_0} - [\mathrm{id}_{P_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}_0}) \\ &= \dim \operatorname{Ker}([T]_{\mathcal{B}_0} - I_3) \\ &= \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{Rang}([T]_{\mathcal{B}_0} - I_3) = 2. \end{aligned}$$

c) *(4 Punkte)* Da die Eigenwerte von T und von $Q = [T]_{\mathcal{B}_0}$ nach Definition des charakteristischen Polynoms übereinstimmen, bestimmen wir Basen der Eigenräume $E_1(Q)$ und $E_3(Q)$. Da elementare Zeilenumformungen der Linksmultiplikation mit Matrizen von trivialem Kern entsprechen, bleibt der Kern einer Matrix unter elementaren Zeilenumformungen erhalten, und somit folgt aus der vorangehenden Teilaufgabe, dass

$$E_1(Q) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Qv = \lambda v\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Man sieht leicht, dass $(1,0,0), (0,2,-1) \in E_1(Q)$ und linear unabhängig sind.

Des Weiteren berechnet man

$$Q - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 + 2Z_3]{Z_1 - 2Z_3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist $v = (x, y, z) \in \operatorname{Ker}(Q - 3I_3)$ genau dann, wenn $2z = x$ und $y = 0$. Insbesondere ist $(2, 0, 1) \in \operatorname{Ker}(Q - 3I_3)$. Da die Vereinigung linear unabhängiger Mengen bestehend aus Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten wieder linear unabhängig ist, ist die geordnete Menge

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}_3$ bestehend aus Eigenvektoren von Q. Da $[\cdot]_{\mathcal{B}_0}$ ein Isomorphismus ist, ist folglich die eindeutig bestimmte geordnete Menge $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ mit $\mathcal{C} = ([p_1]_{\mathcal{B}_0}, [p_2]_{\mathcal{B}_0}, [p_3]_{\mathcal{B}_0})$ eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T. Es ist

$$p_1 = 1,\ p_2 = 2x - x^2,\ p_3 = 2 + x^2.$$

d) Wir entnehmen der Definition von S, dass

$$[S]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} [S]_{\mathcal{B}_0}[T]_{\mathcal{B}_0} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 22 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}_0}[S]_{\mathcal{B}_0}. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt also $ST = TS$ und falls S diagonalisierbar ist, sind S und T – wie in einer Serie bewiesen – simultan diagonalisierbar. Also existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $P_2(\mathbb{R})$ bestehend aus Eigenvektoren von S und T.

Das charakteristische Polynom von S ist

$$\operatorname{char}_S(X) = \det\big([S]_{\mathcal{B}_0} - XI_3\big) = -(X+2)(X-1)(X-3).$$

Somit haben alle Eigenwerte von S algebraische Multiplizität gleich 1 und damit ist S diagonalisierbar.

3. **a)** *(2 Punkte)* Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Geben Sie die Definition einer Bilinearform auf V.

b) *(3 Punkte)* Es gelte $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei β eine nicht-triviale symmetrische Bilinearform auf V. Beweisen Sie, dass ein $v \in V$ existiert mit $\beta(v, v) \neq 0$.

c) *(5 Punkte)* Sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sei β_A gegeben durch $\beta_A(v, w) = \beta(v, Aw)$. Zeigen Sie, dass β_A genau dann symmetrisch ist, wenn $GA = A^T G$ gilt für die Darstellungsmatrix G von β bezüglich der Standardbasis.

d) *(5 Punkte)* Sei β eine nicht-degenerierte, symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Definieren Sie

$$O(\beta) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \beta(Au, Av) = \beta(u, v)\},$$

und zeigen Sie, dass $O(\beta)$ versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

Lösung:

a) *(2 Punkte)* Eine Bilinearform β auf V ist eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$, so dass für alle $u \in V$ die Abbildungen $\beta_u, \beta^u : V \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \beta_u(v) &= \beta(u, v) \quad (v \in V) \\ \beta^u(v) &= \beta(v, u) \quad (v \in V) \end{aligned}$$

linear sind.

b) *(3 Punkte)* Angenommen es gilt $\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Da β nicht-trivial und symmetrisch ist, existieren nach Voraussetzung $u, u' \in V$, so dass $\beta(u, u') \neq 0$ ist. Dann folgt aus der Annahme und aus der Symmetrie von β, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(u + u', u + u') \\ &= \beta(u, u) + \beta(u, u') + \beta(u', u) + \beta(u', u') \\ &= 2\beta(u, u') \end{aligned}$$

und somit $2 = 0$, da $\beta(u, u')$ nach Wahl von u und u' invertierbar ist. Dies ist ein Widerspruch.

c) *(2 Punkte)* Angenommen β_A ist symmetrisch. Sei G die Darstellungsmatrix von β bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}_n$. Dann folgt

$$v^T GAw = \beta(v, Aw) = \beta_A(v, w) = \beta_A(w, v) = \beta(w, Av) = w^T GAv = v^T A^T Gw.$$

Insbesondere gilt also

$$(GA)_{ij} = e_i^T GAe_j = e_i^T A^T Ge_j = (A^T G)_{ij}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ und somit ist $GA = A^T G$.

(3 Punkte) Sei nun G die Darstellungsmatrix von β bezüglich der Standarbasis, d.h. für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\beta(v, w) = v^T Gw.$$

Es gelte zudem $GA = A^T G$. Da β symmetrisch ist, ist G symmetrisch, was in der Vorlesung gezeigt wurde. Es folgt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ wegen der Symmetrie jeden Elements in $M_1(\mathbb{R})$, dass

$$\begin{aligned} \beta_A(v, w) = \beta(v, Aw) &= v^T GAw = w^T A^T G^T v = w^T A^T G^T v \\ &= w^T A^T Gv = w^T GAv = \beta(w, Av) = \beta_A(w, v) \end{aligned}$$

und somit die Symmetrie von β_A.

d) *(5 Punkte)* Sei G die Darstellungsmatrix von β bezüglich der Standardbasis. Da β nicht degeneriert ist, existiert für alle $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v^T Gw \neq 0$ und insbesondere ist also $Gw \neq 0$, da $e_i Gw = (Gw)_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Es folgt $\mathrm{Ker}(L_G) = \{0\}$ und somit ist G invertierbar.

Sei $A \in O(\beta)$. Nach Wahl von G folgt, dass

$$v^T A^T GAw = v^T Gw$$

Siehe nächstes Blatt!

gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Analog zu vorangehender Teilaufgabe gilt also $A^T G A = G$. Insbesondere folgt

$$\det(A)^2 \det(G) = \det(A^T G A) = \det(G)$$

und da G invertierbar ist, folgt $\det(A)^2 = 1$. Insbesondere ist A invertierbar.

Seien $A, B \in O(\beta)$, dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\beta((AB)v, (AB)w) = \beta(A(Bv), A(Bw)) = \beta(Bv, Bw) = \beta(v, w),$$

und somit ist $O(\beta)$ abgeschlossen unter Multiplikation. Die Assoziativität folgt sofort aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation in $M_n(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\beta(I_n v, I_n w) = \beta(v, w)$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und somit ist $I_n \in O(\beta)$ ein neutrales Element. Es bleibt zu zeigen, dass $O(\beta)$ abgeschlossen ist unter Inversion.

Aus der Invertierbarkeit von A, G und aus $A^T G A = G$ folgt $A = G^{-1}(A^T)^{-1} G$ und somit

$$A^{-1} = G^{-1} A^T G.$$

Somit reicht es zu zeigen, dass $G^{-1} A^T G \in O(\beta)$ gilt, wann immer $A \in O(\beta)$ ist. Da G nach Voraussetzung symmetrisch ist, gilt $G^{-1} G^T = G^{-1} G = I_n$ und somit ist $G^{-1} = (G^T)^{-1} = (G^{-1})^T$, da Inversion und Transposition kommutieren. Unter Verwendung dieser Tatsachen berechnet man für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\beta(A^{-1}v, A^{-1}w) &= v^T (G^{-1} A^T G)^T G (G^{-1} A^T G) w \\
&= v^T G^T A (G^{-1})^T A^T G w \\
&= v^T G A \underbrace{G^{-1} A^T G}_{=A^{-1}} w \\
&= v^T G w = \beta(v, w),
\end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung.

4. **a)** *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition einer Jordanbasis.

b) *(3 Punkte)* Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Zwei lineare Abbildungen, die das gleiche, in Linearfaktoren zerfallende, charakterische Polynom besitzen, besitzen (bis auf Ähnlichkeit) dieselbe Jordannormalform.

c) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie eine Jordannormalform der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{6\times 6}(\mathbb{K}).$$

Bitte wenden!

d) *(6 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $I_n - J_{n,0}$ und $I_n + J_{n,0}$ über $\mathbb{K}$ zueinander ähnlich sind, wobei $J_{n,0}$ der $n \times n$-Jordanblock zum Eigenwert 0 ist.

Lösung:

a) *(2 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V ist eine Jordanbasis für T, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ Jordan Normalform besitzt.

b) *(3 Punkte)* Das charakteristische Polynom der Matrizen I_2 und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist gleich und da jeder Körper die 1 enthält, zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren. Die beiden gewählten Matrizen sind bereits in Jordan Normalform, und die beiden Formen sind nicht ähnlich, da die Identitätsmatrix nur zu sich selber ähnlich ist. Somit besitzen die beiden Matrizen (bzw. die zugehörigen Linksmultiplikationsabbildungen) verschiedene Jordan Normalform und die Aussage ist falsch.

c) *(4 Punkte)* Da die Determinante einer Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonaleinträge ist, ist das charakteristische Polynom von B gegeben als

$$\mathrm{char}_B(X) = \det(B - XI_6) = (1 - X)^6.$$

Somit zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren und der einzige Eigenwert ist 1. Es ist

$$B - I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $A = B - I_6$, dann gilt für $1 \leq i \leq 6$ die Gleichung $Ae_i = A^{(i)}$. Insbesondere ist

$$Ae_i = \sum_{j=i+1}^{6} e_j \quad (1 \leq i \leq 6).$$

Explizit erhält man also

$$\begin{aligned} Ae_6 &= 0 \\ Ae_5 &= e_6 \\ A^2e_4 &= A(e_5 + e_6) = e_6 \\ A^3e_3 &= A^2(e_4 + e_5 + e_6) = e_6 \\ A^4e_2 &= A^3(e_3 + e_4 + e_5 + e_6) = e_6 \\ A^5e_1 &= A^4(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) = e_6 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Insbesondere ist also e_1 ein Hauptvektor zum Eigenwert 1 mit Zyklus der Länge 6 und somit enthält die Jordan Normalform von B einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Dimension mindestens 6. Da B eine 6×6-Matrix ist, ist

$$J_{6,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Jordan Normalform für B.

d) *(6 Punkte)* Falls $n = 1$ ist, folgt $J_{n,0} = (0)$ und somit ist $I_n + J_{n,0} = I_n - J_{n,0}$ und es ist nichts zu zeigen. Sei also von nun an $n > 1$.

Die Matrizen $I_n - J_{n,0}$ und $I_n + J_{n,0}$ sind obere Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen alle gleich 1. Somit ist $(1 - X)^n$ das gemeinsame charakteristische Polynom und da das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, sind beide Matrizen über $\mathbb{K}$ ähnlich zu ihren Jordan Normalformen. Man beachte, dass $I_n + J_{n,0} = J_{n,1}$ bereits in Jordan Normalform ist. Es reicht also zu zeigen, dass $I_n - J_n$ einen Hauptvektor zum Eigenwert 1 mit Zyklus der Länge n besitzt, denn daraus folgt, dass jede Jordan Normalform zu $I_n - J_{n,0}$ einen Jordanblock $J_{n,1} \in M_n(\mathbb{K})$ enthält und da $I_n - J_{n,0} \in M_n(\mathbb{K})$ ist, folgt also die Ähnlichkeit von $I_n - J_{n,0}$ und $J_{n,1} = I_n + J_{n,0}$ wie gewünscht.

Wir verwenden wieder

$$J_{n,0}e_i = J_{n,0}^{(i)} = \begin{cases} e_{i-1} & \text{falls } i > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten insbesondere $-J_{n,0}e_n = -e_{n-1}$. Wir verwenden nun Induktion. Falls $n = 2$ ist, folgt also $(-J_{n,0})^2 e_n = 0$ und $-J_{n,0}e_n = -e_1 \neq 0$ und $I_n - J_{n,0}$ besitzt also einen Hauptvektor zum Eigenwert 1 mit einem Zyklus der Länge n. Es bleibt, die Aussage im Falle $n > 2$ zu beweisen. Sei $i \leq n - 2$ und wir nehmen an, es gilt $(-J_{n,0})^i e_n = (-1)^i e_{n-i}$. Dann folgt $(-J_{n,0})^{i+1} = (-1)^i(-J_{n,0})e_{n-i} = (-1)^{i+1}e_{n-i-1}$ und nach Induktion also $(-J_{n,0})^{n-1}e_n = (-1)^{n-1}e_1$. Da $J_{n,0}e_1 = 0$ ist, besitzt $-J_{n,0}$ also den Hauptvektor e_n zum Eigenwert 1 und mit Zyklus der Länge n. Somit folgt die Behauptung.

5. Im Folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Gegeben $u \in V$, definieren Sie eine Abbildung $H_u : V \to V$ durch $H_u(v) = v - 2\langle u, v \rangle u$.

a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass H_u linear ist.

b) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $H_u = I_V \iff u = 0$.

c) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass H_u^* existiert. Folgern Sie, dass H_u selbstadjungiert ist.

Bitte wenden!

d) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass H_u genau dann unitär ist, wenn $\|u\| \in \{0,1\}$ ist.

e) *(3 Punkte)* Sei V ist endlichdimensional. Bestimmen Sie die Eigenwerte von H_u.

Lösung:

a) *(3 Punkte)* Unter Verwendung der Sesquilinearität des inneren Produkts folgt für alle $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} H_u(v_1 + \lambda v_2) &= (v_1 + \lambda v_2) - 2\langle u, v_1 + \lambda v_2\rangle u \\ &= (v_1 + \lambda v_2) - 2(\langle u, v_1\rangle + \lambda\langle u, v_2\rangle)u \\ &= (v_1 - 2\langle u, v_1\rangle u) + \lambda(v_2 - 2\langle u, v_2\rangle u) \\ &= H_u(v_1) + \lambda H_u(v_2). \end{aligned}$$

Also ist H_u linear.

b) *(3 Punkte)* Es ist $H_u = I_V$ genau dann, wenn $H_u(v) = v$ für alle $v \in V$ gilt, also genau dann, wenn $v - 2\langle u, v\rangle u = v$ gilt für alle $v \in V$ bzw. aufgrund der Kürzungsregel dazu äquivalent $2\langle u, v\rangle u = 0$ für alle $v \in V$. Es reicht also zu zeigen, dass $2\langle u, v\rangle u = 0$ für alle $v \in V$ genau dann gilt, wenn $u = 0$ ist. Falls $u = 0$, dann ist $\lambda u = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und es folgt die Implikation $u = 0 \implies \forall v \in V : 2\langle u, v\rangle u = 0$. Sei nun $u \neq 0$, dann ist $\lambda u \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Tatsächlich gilt für solche λ

$$0 \neq u = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v)$$

und folglich $\lambda v \neq 0$. *(Das muss durch die Studierenden nicht überprüft werden.)* Da $u \neq 0$, gilt $2\langle u, u\rangle \neq 0$, da $2 \neq 0$ ist in $\mathbb{C}$ und da $\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ eine Norm auf V definiert. Somit folgt die Behauptung.

c) *(3 Punkte)* Unter Verwendung der Sesquilinearität des inneren Produkts berechnen wir für beliebige $v, w \in V$

$$\begin{aligned} \langle w, H_u(v)\rangle &= \langle w, v - 2\langle u, v\rangle u\rangle \\ &= \langle w, v\rangle - 2\langle u, v\rangle\langle w, u\rangle \\ &= \langle w, v\rangle + \langle -2\overline{\langle w, u\rangle} u, v\rangle \\ &= \langle w - 2\langle u, w\rangle u, v\rangle = \langle H_u(w), v\rangle \end{aligned}$$

und da H_u linear ist und die Gleichung

$$\langle H_u^*(w), v\rangle = \langle w, H_u(v)\rangle \quad (v, w \in V)$$

die adjungierte eindeutig und vollständig bestimmt, folgt $H_u^* = H_u$, d.h. H_u ist insbesondere selbstadjungiert.

d) *(3 Punkte)* Da die Identität unitär ist, können wir wegen Teilaufgabe b) annehmen, dass $u \neq 0$ ist, bzw. dazu äquivalent $\|u\| \neq 0$ ist. Man berechnet für beliebige $v, w \in V$, dass

$$\langle H_u(w), H_u(v)\rangle = \langle w, v\rangle - 4\langle w, u\rangle\langle u, v\rangle(1 - \langle u, u\rangle).$$

Per definitionem ist H_u genau dann unitär, wenn $\langle H_u(w), H_u(v)\rangle = \langle w, v\rangle$ gilt für alle $v, w \in V$, und somit ist also H_u genau dann unitär, wenn

$$4\langle w, u\rangle\langle u, v\rangle(1 - \|u\|^2) = 0$$

gilt für alle $v, w \in V$. Falls $\|u\| = 1$, dann ist dies erfüllt. Sei $\|u\| \neq 1$, dann gilt wegen der Voraussetzung $\|u\| \neq 0$ und wegen der nicht-Negativität der Norm, dass $\|u\| \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Insbesondere ist also $\|u\|^2 \neq 1$. Nach Einsetzen von u für v, w erhalten Wir

$$0 \neq 4\|u\|^4(1 - \|u\|^2) = 4\langle u, u\rangle\langle u, u\rangle(1 - \|u\|^2)$$

und somit ist H_u in diesem Falle nicht unitär.

e) *(4 Punkte)* Man berechnet $H_u(u) = (1-2\|u\|^2)u$, und folglich ist u ein Eigenvektor zum Eigenwert $1 - 2\|u\|^2$. Somit ist

$$\mathbb{C}u \subseteq E_{1-2\|u\|^2} = \{v \in V \mid H_u(v) = (1 - 2\|u\|^2)v\}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $V = \mathbb{C}u \oplus \{u\}^\perp$. Sei $v \in \{u\}^\perp$, dann ist

$$H_u(v) = v - 2\langle u, v\rangle u = v$$

und somit ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Insbesondere gilt also

$$\{u\}^\perp \subseteq E_1 = \{v \in V \mid H_u(v) = v\}.$$

Es folgt

$$V = \mathbb{C}u \oplus \{u\}^\perp \subseteq E_{1-2\|u\|^2} + E_1 \subseteq V$$

und folglich ist $V = E_{1-2\|u\|^2} + E_1$. Insbesondere folgt $\sigma(H_u) = \{1, 1 - 2\|u\|^2\}$.

6. a) *(10 Punkte)* Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Zeigen Sie, dass A eine eindeutige symmetrische, positiv definite Quadratwurzel besitzt, d.h. es existiert genau eine Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit, sodass $A = B^2$.

b) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie die symmetrische, positiv definite Quadratwurzel der Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) *(5 Punkte)* Da A symmetrisch, positiv definit ist, existiert nach dem ersten Spektralsatz eine ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$, sodass $D = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_n} A [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist mit positiven Diagonaleinträgen. Da $\mathcal{B}$ eine ONB ist, gilt $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_n} = \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{B}}\right)^T$.

Im Folgenden sei $Q = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$. Sei $\sqrt{D}$ die eindeutige Diagonalmatrix mit positiven Einträgen, sodass $\sqrt{D}\sqrt{D} = D$ gilt. Definiere $B = Q\sqrt{D}Q^T$, dann gilt

$$B^2 = Q\sqrt{D}Q^T Q\sqrt{D}Q^T = Q\sqrt{D}\sqrt{D}Q^T = QDQ^T = A.$$

Des Weiteren ist $B^T = Q\sqrt{D}^T Q^T = Q\sqrt{D}Q^T = B$, da $\sqrt{D}$ eine Diagonalmatrix ist. Schlussendlich ist B positiv definit, denn B ist nach Konstruktion diagonalisierbar mit positiven Eigenwerten. Sei hierfür $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und sei $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ so gewählt, dass $v = Qw$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die (positiven) Diagonaleinträge von $\sqrt{D}$, dann folgt aus der Orthogonalität von Q, dass

$$\langle Bv, v\rangle = \langle \sqrt{D}Q^T v, Q^T v\rangle = \langle \sqrt{D}w, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 > 0.$$

Dies zeigt die Existenz einer symmetrischen, positiv definiten Quadratwurzel.

(5 Punkte) Sei nun B eine beliebige symmetrische, positiv definite Quadratwurzel von A. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete ONB von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Sei v ein Eintrag von $\mathcal{B}$ und sei $Av = \lambda^2 v$ für $\lambda > 0$. Da B symmetrisch, positiv definit ist, gilt $\mathrm{Ker}(B + \lambda I_n) = \{0\}$, da B keine negativen Eigenwerte besitzt. Insbesondere folgt aus

$$0 = (A - \lambda^2 I_n)v = (B + \lambda I_n)(B - \lambda I_n)v,$$

dass v ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ ist. Sei $Q = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$, dann ist also $BQ = QD_B$ für eine Diagonalmatrix D_B. Wir erinnern nochmals daran, dass Q eine orthogonale Matrix ist.

Sei nun C eine beliebige weitere symmetrische, positiv definite Quadratwurzel von A, dann ist also $C = QD_C Q^T$ und somit $C^{-1} = QD_C^{-1}Q^T$. Somit ist

$$I_n = C^{-2}B^2 = QD_C^{-2}D_B^2 Q^T \implies D_C^{-2}D_B^2 = I_n \implies D_B^2 = D_C^2$$

und somit folgt aufgrund der Positivität der Diagonaleinträge von D_B und D_C, dass $D_B = D_C$ ist. Insbesondere gilt also $B = C$.

Alternativ siehe die Musterlösung zu Aufgabe 2c unter https://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-1152-02L/ex/s09/l09.pdf

b) *(5 Punkte)* Sei $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, dann ist $\mathrm{char}_M(X) = X^2 - 3X + 2$ und somit besitzt M die Eigenwerte 1 und 2. Da $\det(A) = 3\det(M)$ ist, folgt $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$ (und somit ist A tatsächlich positiv definit). Man berechnet $\mathrm{Ker}(M - I_2) = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$ und $\mathrm{Ker}(M - 2I_2) = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$. Da A in Blockform ist, ist also

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), e_3\right)$$

eine ONB von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Diese Daten setzen wir in obigen Beweis ein und finden eine positiv definite Quadratwurzel

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{12} \end{pmatrix}.$$

die positive Definitheit von B folgt aus der Positivität der Eigenwerte $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$.