Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $T \in \operatorname{End}(V)$ und λ_j ein Eigenwert von T. Setze*

$$E_{\lambda_j} := \{u \in V \mid T(u) = \lambda_j u\} = \operatorname{Ker}(T - \lambda_j \mathrm{id}_V).$$

Wir nennen E_{λ_j} den Eigenraum *von T zum Eigenwert λ_j und $\dim(E_{\lambda_j})$ die* geometrische Multiplizität *von λ_j.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$, sodass $\operatorname{char}_T(X)$ über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T. Dann gilt:*

1) *T ist diagonalisierbar $\iff$ für alle $1 \le j \le k$ gilt $m_j = \dim(E_{\lambda_j}) \iff V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$.*
2) *Wenn T diagonalisierbar ist und für jedes $1 \le i \le k$ die Menge $S_i \subseteq E_{\lambda_i}$ eine Basis von E_{λ_i} ist, dann ist $S := S_1 \cup \dots \cup S_k$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von T.*

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$ und sei $u \in V$. Wir nennen den Unterraum*

$$W := \operatorname{span}\bigl(\{T^k(u) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\bigr)$$

*den von u aufgespannten T-*zyklischen *Unterraum von V.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Wenn $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum ist, so teilt das Polynom $\operatorname{char}_{T_W}(X)$ das Polynom $\operatorname{char}_T(X)$ in $\mathbb{K}[X]$.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Sei $u \in V \setminus \{0\}$ und $W := \operatorname{span}\bigl(\{T^l(u) \mid l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\bigr)$. Sei $k := \dim W$. Dann gelten*

i) *$k \ge 0$ und $\{T^l(u) \mid 0 \le l < k\}$ ist eine Basis von W.*

ii) *Seien $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$, sodass $T^k(u) = -a_0 u - \dots - a_{k-1} T^{k-1}(u)$, dann ist*

$$\operatorname{char}_{T_W}(X) = (-1)^k (a_0 + a_1 X + \dots + a_{k-1} X^{k-1} + X^k).$$

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $T \in \operatorname{End}(V)$ heisst*

i) Involution, *falls $T \circ T = \mathrm{id}_V$.*

ii) Projektion, *falls $T \circ T = T$.*

iii) nilpotent, *falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $T^k = 0$.*

Proposition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $\mathfrak{P} \subseteq \operatorname{End}(V)$ die Menge aller Projektionen $P : V \to V$ und sei*

$$\mathfrak{W} = \{(W_1, W_2) \mid W_i \subseteq V \text{ ist ein Unterraum und } V = W_1 \oplus W_2\}$$

die Menge aller Paare von Unterräumen mit trivialem Schnitt, deren Vereinigung V erzeugt. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} F_1 &: \mathfrak{P} \to \mathfrak{W} \\ &p \mapsto \bigl(\operatorname{Im}(P), \operatorname{Ker}(P)\bigr) \\ F_2 &: \mathfrak{W} \to \mathfrak{P} \\ &(W_1, W_2) \mapsto P \in \mathcal{P} \text{ die Projektion auf } W_1 \text{ parallel zu } W_2 \end{aligned}$$

sind wohldefiniert und zueinander invers. Zudem gilt $\operatorname{Im}(P) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_V - P)$ für alle $P \in \mathfrak{P}$.

Proposition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $P \in \operatorname{End}(V)$ eine Projektion. Dann gelten*

i) *Die Eigenwerte von P liegen in $\{0,1\}$ und $V = \operatorname{Ker}(P) \oplus E_1$. Insbesondere ist P diagonalisierbar und $E_1 = \operatorname{Im}(P)$.*

ii) *Sei $P^\perp := \mathrm{id}_V - P$, dann ist $P^\perp \circ P^\perp = P^\perp$. Es ist $\operatorname{Ker}(P^\perp) = \operatorname{Im}(P)$ und $\operatorname{Im}(P^\perp) = \operatorname{Ker}(P)$.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $S = (v_1, \dots, v_k)$ eine geordnete, orthogonale Teilmenge von V und sei $0 \notin S$. Falls $w = \sum_{i=1}^k a_i v_i$ für Skalare $a_i \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$a_i = \frac{\langle v_i, w\rangle}{\|v_i\|^2} \quad (1 \le i \le k).$$

Theorem. *Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $S = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete, linear unabhängige Teilmenge von V. Definiere*

$$w_1 = v_1 \quad \text{und} \quad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k\rangle}{\|w_j\|^2} w_j \quad (2 \le k \le n).$$

Dann ist $\tilde{S} = (w_1, \dots, w_n)$ eine geordnete orthogonale Teilmenge von V, deren Elemente alle von 0 verschieden sind, und die $\operatorname{span}(S) = \operatorname{span}(\tilde{S})$ erfüllt.

Korollar. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine ONB von* V *und sei* $T \in \mathrm{End}(V)$*. Sei* $A = [T]_{\mathcal{B}}$*, dann gilt* $A_{ij} = \langle v_i, T(v_j)\rangle$, $(1 \le i, j \le \dim V)$.

Proposition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Euklidischer Vektorraum, sei* $W \subseteq V$ *ein endlichdimensionaler Unterraum und sei* $(v_1, \ldots, v_k)$ *eine ONB von* W*. Sei* $v \in V$*, dann existiert ein eindeutiges* $z \in W^{\perp}$*, sodass*

$$v = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, v\rangle v_i + z.$$

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung* $\Phi : V \to V^*$, $v \mapsto \Phi_v$ *mit* $\Phi_v(u) = \langle u, v\rangle$ *für alle* $u \in V$ *ein Isomorphismus mit Inverse* $\Phi^{-1} : V^* \to V$ *gegeben wie folgt: Sei* $f \in V^*$*, dann ist* $\Phi^{-1}(f) \in V$ *der eindeutig bestimmte Vektor in* V*, der für alle* $u \in V$ *die Gleichung* $\langle u, \Phi^{-1}(f)\rangle = f(u)$ *erfüllt.*

Theorem. *Seien* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ *und* $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *endlichdimensionale Euklidische Vektorräume. Seien* $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *geordnete orthonormale Basen von* V *bzw. von* W *und sei* $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$*. Dann gilt*

$$[T^*]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = ([T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^T.$$

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *selbstadjungiert. Dann existiert eine geordnete Orthonormalbasis von* V*, deren Elemente alles Eigenvektoren von* T *sind.*

Theorem. *Sei* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *symmetrisch, dann existiert eine orthogonale Matrix* $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*, sodass*

$$D = Q^{-1}AQ = Q^TAQ$$

eine reelle Diagonalmatrix ist.

Korollar. *Sei* V *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *und angenommen* V *besitzt eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von* T*. Dann ist* T *selbstadjungiert.*

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Sei* $T \in \mathrm{End}(V)$*. Folgende sind äquivalent:*

i) $\forall u, v \in V : \langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$.

ii) $TT^* = T^*T = \mathrm{id}_V$.

iii) Sei $\mathcal{B}$ *eine ONB von* V*, dann ist* $T(\mathcal{B})$ *eine ONB von* V*.*

iv) Es existiert eine ONB $\mathcal{B}$ *von* V*, sodass* $T(\mathcal{B})$ *eine ONB von* V *ist.*

v) T *ist eine* Isometrie.

Korollar. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$*. Folgende sind äquivalent:*

i) V *besitzt eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von* T *zu Eigenwerten, deren Absolutbetrag allesamt gleich* 1 *ist.*

ii) T *ist selbstadjungiert und orthogonal.*

Korollar. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum,* $n = \dim(V)$*, und sei* $\mathcal{B}$ *eine Basis von* V*. Seien* $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ *und* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$*. Folgende sind äquivalent:*

i) $A = [\beta]_{\mathcal{B}}$.

ii) $\forall u, v \in V :\ \beta(u, v) = [u]^T_{\mathcal{B}} A [v]_{\mathcal{B}}$.

Theorem. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und sei* $2 \neq 0$ *in* $\mathbb{K}$*. Dann ist jede symmetrische Bilinearform auf* V *diagonalisierbar.*

Theorem. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper in welchem* $2 \neq 0$ *gilt. Sei* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *symmetrisch. Dann ist* A *kongruent zu einer Diagonalmatrix.*

Definition. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper, sodass* $2 \neq 0$*. Sei* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. Eine Abbildung* $Q : V \to \mathbb{K}$ *is eine* quadratische Form *auf* V*, falls*

$$Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K},\ v \in V,$$

und falls die Abbildung $\beta_Q : V \times V \to \mathbb{K}$ *definiert durch*

$$\beta_Q(u, v) = \frac{1}{2}\big(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\big) \quad (u, v \in V)$$

eine Bilinearform auf V *ist.*

Definition. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sodass $2 \neq 0$. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $Q : V \to \mathbb{K}$ ist eine quadratische Form, wenn eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und eine symmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existieren, sodass*

$$Q(v) = [v]_{\mathcal{B}}^T A[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{für alle } v \in V.$$

Theorem. *Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$. So gilt:*

i) Es existiert eine ONB $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ von $\mathbb{R}^n$ für das standard innere Produkt, es gibt $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q} > 0$, sodass $p + q \leq n$ und

$$Q(v) = \lambda_1 a_1^2 + \cdots + \lambda_p a_p^2 - \lambda_{p+1} a_{p+1}^2 - \cdots - \lambda_{p+q} a_{p+q}^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelten, wobei $v = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$.

ii) Es existiert eine orthogonale Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ für das standard innere Produkt, es gibt $p, q \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, sodass $p + q \leq n$ und

$$Q(v) = \tilde{a}_1^2 + \cdots + \tilde{a}_p^2 - \tilde{a}_{p+1}^2 - \cdots - \tilde{a}_{p+q}^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelten, wobei $v = \tilde{a}_1 v_1 + \cdots + \tilde{a}_n v_n$.

Das Tupel (p, q) heisst Typus *von Q.*

Korollar. *Zwei symmetrische, reelle Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sind genau dann kongruent, wenn $\sigma(A) = \sigma(B)$ gilt.*

Theorem. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale, euklidische Vektorräume, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$, sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $r = \mathrm{Rang}(T) \geq 1$. Dann existieren $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ und orthonormale Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ von V und W, sodass*

$$Tv_i = \begin{cases} \sigma_i w_i & 1 \leq i \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Korollar. *Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $r = \mathrm{Rang}(A) \geq 1$ existieren Matrizen $Q \in O(n)$, $R \in O(m)$ sowie eine Matrix $D \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ der Form*

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, sodass $A = RDQ^T$ gilt. Die Einträge $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ in der Singulärwertzerlegung von A heissen Singulärwerte von A und sind gleich der positiven Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte von AA^T.

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$. T ist eine* Rotation, *falls entweder $T = \mathrm{id}_V$ oder falls ein 2-dimensionaler Unterraum $W \subseteq V$ mit einer ONB (v_1, v_2) von W sowie ein $\theta \in \mathbb{R}$ existieren, sodass*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \cos\theta v_1 + \sin\theta v_2 \\ T(v_2) &= -\sin\theta v_1 + \cos\theta v_2 \end{aligned}$$

und $T(v) = v$ für alle $v \in W^\perp$ gelten. T ist eine Rotation um $W^\perp$, bzw. $W^\perp$ ist die Rotationsachse *von T.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal und seien $W_1, \dots, W_m$ paarweise orthogonale, T-invariante Unterräume von V der Dimensionen 1 oder 2. sodass $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.*

i) Die Anzahl der Unterräume W_i für welche $T|_{W_i}$ eine Rotation bzw. eine Reflexion ist, ist gerade oder ungerade abhängig davon, ob $\det T = 1$ oder $\det T = -1$.

ii) Es ist immer möglich V so zu zerlegen, dass die Anzahl der W_i für welche $T|_{W_i}$ eine Reflexion ist, gleich 1 oder 0 ist und zudem, falls T_{W_i} eine Reflexion ist, $\dim W_i = 1$ gilt.

Theorem. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T. Dann gelten*

i) $K_\lambda \subseteq V$ ist ein T-invarianter Unterraum und $E_\lambda \subseteq K_\lambda$.

ii) Für alle $\mu \neq \lambda$ ist $(T - \mu\mathrm{id}_V)|_{K_\lambda}$ injektiv.

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{char}_T(X)$ zerfalle in Linearfaktoren. Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V, die eine disjunkte Vereiningung von Zyklen von Hauptvektoren von T ist. So gelten* *i) Sei $\gamma \subseteq \mathcal{B}$ ein Zyklus eines Hauptvektors von T und sei $W = \operatorname{span}(\gamma)$. Dann ist W invariant unter T und $[T|_W]_\gamma$ ist ein Jordanblock.*

ii) $\mathcal{B}$ ist eine Jordanbasis von V.

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. So ist $\exp(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ wohldefiniert. Es gilt $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$ und somit $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann existiert genau eine ONB $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ von V, sodass für alle $1 \le j \le n$ gilt*

$$v_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}\tilde{v}_i \quad (a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{jj} \in \mathbb{R}^+).$$

Es gilt $\tilde{v}_i = \frac{\hat{v}_i}{\|\hat{v}_i\|}$, wobei $\hat{v}_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \hat{v}_j, v_i\rangle}{\|\hat{v}_j\|^2}\hat{v}_j$. Insbesondere besitzt jeder endlichdimensionale unitäre Vektorraum eine ONB.

Proposition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und sei $\pi_U : V \to U$ die orthogonale Projektion von V auf U. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ eine ONB von U, dann gilt*

$$\pi_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v\rangle v_i \quad (v \in V).$$

Proposition. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ unitäre Vektorräume. Seien $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$.*

- *Wenn T^* existiert, dann existiert auch $(T^*)^*$ und es gilt $(T^*)^* = T$.*
- *Falls T^* existiert und $\dim V < \infty$, dann gilt für jede ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, dass*

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_i), w\rangle_W v_i \quad (w \in W).$$

- *Seien V, W endlichdimensional und seien $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ ONB von V, W. Dann ist*

$$[T^*]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = ([T]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}})^*.$$

- *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, dann ist $(L_A)^* = L_{A^*}$.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Wenn $\operatorname{char}_T(X)$ in Linearfaktoren zerfällt, dann existiert eine ONB $\mathcal{B}$ von V, sodass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Proposition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$.*

i) Falls T selbstadjungiert ist, ist T normal.

ii) Falls T unitär ist, ist T normal.

iii) Falls T normal ist, ist T^* normal.

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ normal.*

i) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ für alle $v \in V$.

ii) $T - c\,\mathrm{id}_V$ ist normal für alle $c \in \mathbb{K}$.

iii) $T(v) = \lambda v \implies T^*(v) = \overline{\lambda}v$.

iv) Seien λ_1, λ_2 verschiedene Eigenwerte von T mit Eigenvektoren v_1, v_2. Dann gilt $v_1 \perp v_2$.

Theorem. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. T ist genau dann normal, wenn eine ONB $\mathcal{B}$ von V bestehend aus Eigenvektoren von T existiert.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei T selbstadjungiert.*

i) Alle Eigenwerte von T sind reell.

ii) Falls $\dim V < \infty$, dann existiert eine ONB von V bestehend aus Eigenvektoren von T. Insbesondere ist T diagonalisierbar.

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$ unitär, so gelten:*

i) Alle Eigenwerte von T haben Betrag 1.

ii) T ist diagonalisierbar.