Lineare Algebra I

May 29, 2018

1 Grundlagen

1.1 Relationen

Definition. *Seien X und Y Mengen. Eine* Relation auf $X \times Y$ *ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$. Für $x \in X$, $y \in Y$ sagen wir x* steht in Relation mit y, *falls $(x, y) \in \mathcal{R}$ ist. Wir schreiben $x\mathcal{R}y$.*

Definition. *Sei $\mathcal{R}$ eine Relation auf X, d.h. $\mathcal{R} \subseteq X \times X$.*

i) $\mathcal{R}$ *ist* transitiv, *falls* $\forall x, y, z \in X$

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$$

ii) $\mathcal{R}$ *ist* reflexiv, *falls* $\forall x \in X$

$$x\mathcal{R}x$$

iii) $\mathcal{R}$ *ist* symmetrisch, *falls* $\forall x, y \in X$

$$x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$$

Definition. *Eine Relation, die sowohl transitiv wie reflexiv wie symmetrisch ist, nennt man eine* Äquivalenzrelation. *Für $x, y \in X$ und $x\mathcal{R}y$ schreibt man $x \sim y$ und sagt x und y sind äquivalent.*

Definition. *Sei X eine Menge und $\sim$ ein Äquivalenzrelation auf X. Wir definieren die* Äquivalenzklasse von $x \in X$ *durch*

$$[x]_\sim := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

Proposition. *Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation. $\forall x, y \in X$*

$$[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \{\} \iff [x]_\sim = [y]_\sim$$

Definition. *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir definieren die* Quotientenmenge $X/\sim$ *als die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.*

1.2 Grundlegende Algebra

Definition. *Eine* Gruppe *ist ein Tupel* $(G, \circ, e)$ *bestehend aus einer Menge* G*, einer Abbildung*

$$\circ : G \times G \to G$$

und einem ausgezeichneten Element $e \in G$*, so dass gilt*

(G1) $\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ *(Assoziativität)*

(G2) $\forall a \in G : e \circ a = a$ *(linksneutrales Element)*

(G3) $\forall a \in G \exists a' \in G : a' \circ a = e$ *(linksinverses Element)*

Die Gruppe heisst kommutativ *oder* abelsch*, wenn zusätzlich gilt*

(G4) $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$ *(Kommutativität)*

Theorem. *In jeder Gruppe* $(G, \circ, e)$ *gilt:*

i) *Jedes linksneutrale Element ist rechtsneutral, d.h.* $\forall a \in G : a \circ e = a$.

ii) *Jedes zu* $a \in G$ *linksinverse Element* $a' \in G$ *ist rechtsinvers, d.h.* $a \circ a' = e$.

iii) *Das neutrale Element ist eindeutig.*

iv) *Zu jedem* $a \in G$ *ist das inverse Element* $a^{-1} \in G$ *eindeutig.*

v) $\forall a \in G : (a^{-1})^{-1} = a$.

vi) $\forall a, b \in G : (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

vii) $\forall a, b \in G \exists! x \in G : a \circ x = b$.

viii) $\forall a, b \in G \exists! y \in G : y \circ a = b$.

ix) $\forall a, b, c \in G : b = c \iff a \circ b = a \circ c$.

x) $\forall a, b, c \in G : b = c \iff b \circ a = c \circ a$.

Definition. *Ein* Körper *ist ein Tupel* $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ *bestehend aus einer Menge* $\mathbb{K}$ *mit zwei Abbildungen*

$$\begin{aligned} + : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; (x, y) \mapsto x + y \\ \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; (x, y) \mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

und ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in \mathbb{K}$*, so dass die folgenden Körperaxiome gelten:*

(K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x + (y + z) = (x + y) + z$ *(Assoziativität der Addition)*

(K2) $\forall x, y \in \mathbb{K} : x + y = y + x$ *(Kommutativität der Addition)*

(K3) $\forall x \in \mathbb{K} : 0 + x = x$ *(Neutrales Element der Addition)*

(K4) $\forall x \in \mathbb{K} \exists x' \in \mathbb{K} : x + x' = 0$ *(Inverses Element der Addition)*

(K5) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(Assoziativität der Multiplikation)*

(K6) $\forall x \in \mathbb{K} : 1 \cdot x = x$ *(Neutrales Element der Multiplikation)*

(K7) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists x' \in \mathbb{K} : x \cdot x' = 1$ *(Inverses Element der Multiplikation)*

(K8) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} :$ *(Distributivität)*

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

(K9) $1 \neq 0$ *(Nichttrivialität)*

(K10) $\forall x, y \in \mathbb{K} : x \cdot y = y \cdot x$ *(Kommutativität der Multiplikation)*

Definition. *Sei R ein Ring. $\forall x \in R \forall n \in \mathbb{Z}$ definieren wir*

$$n \cdot x := \begin{cases} \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ Summanden}} & \text{falls } n > 0 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \\ -(\overbrace{x + \cdots + x}^{|n| \text{ Summanden}}) & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

Theorem. *Sei R ein Ring. $\forall x, y \in R \forall n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:*

i) $(-n) \cdot x = -(n \cdot x)$.

ii) $(m + n) \cdot x = (m \cdot x) + (n \cdot x)$.

iii) $(m \cdot n) \cdot x = m \cdot (n \cdot x)$.

iv) $m \cdot (x + y) = (m \cdot x) + (m \cdot y)$.

v) $m \cdot (x \cdot y) = (m \cdot x) \cdot y$.

Definition. *Sei R ein Ring. $\forall x \in R \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir*

$$x^n := \begin{cases} \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} & \text{falls } n > 0 \\ 1 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

Wenn $x \in R^\times$, und $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, dann definieren wir

$$x^n := (x^{-1})^n$$

Theorem. $\forall x, y \in \mathbb{K} \forall n, m \in \mathbb{Z}$ *gilt, soweit definiert:*

i) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$.

ii) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$.

iii) $x^{m \cdot n} = (x^m)^n$.

2 Vektorräume und lineare Abbildungen

2.1 Vektorräume

Definition. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Menge V zusammenmit einer inneren Verknüpfung (Addition genannt)*

$$+ : V \times V \to V; (u, v) \mapsto u + v$$

und einer äusseren Verknüpfung (Multiplikation genannt)

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V; (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

heisst ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ wenn folgende Vektorraumaxiome gelten:

(V1) $\forall u, v \in V : u + v = v + u$

(V2) $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$

(V3) $\exists\, 0_V \in V\, \forall u \in V : 0_V + u = u$

(V4) $\forall u \in V\, \exists\, v \in V : u + v = 0_V$

(V5) $\forall u \in V : 1 \cdot u = u$

(V6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\, \forall u \in V : (\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

(V7) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall u, v \in V : \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

(V8) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\, \forall u \in V : (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Definition. *Eine $m \times n$* Matrix *A mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit n Spalten und m Zeilen. a_{ij} bezeichnet den Koeffizienten in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

Proposition. *Sei V ein Vektorraum und seien $u, v, w \in V$, dann gilt*

$$u + w = v + w \implies u = v$$

Korollar. *Der Vektor 0_V in (V3) ist eindeutig bestimmt.*

Korollar. *Sei $u \in V$. Der Vektor v in (V4) ist eindeutig bestimmt.*

Proposition. *Sei V ein Vektorraum, so gilt:*

a) $0 \cdot u = 0_V \forall u \in V$.

b) $(-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (-u) \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall u \in V$.

c) $\lambda \cdot 0_V = 0_V \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

2.2 Unterräume

Definition. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ nennt man einen* Unterraum*, wenn W ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist mit der von V induzierten Addition und Multiplikation mit Skalaren in $\mathbb{K}$.*

Theorem. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W ist ein Unterraum von V dann und nur dann, wenn folgendes gilt:*

i) $0 \in W$.

ii) $\forall u, v \in W : u + v \in W$.

iii) $\forall u \in W \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot u \in W$.

Theorem. *Seien V ein Vektorraum und I eine Indexmenge und sei für jedes $i \in I$ W_i ein Unterraum von V. Dann ist der Durchschnitt*

$$W = \bigcap_{i \in I} W_i$$

wieder ein Unterraum.

Definition. *Seien S_1 und S_2 nicht-leere Teilmengen von V. Man definiert die* Summe *$S_1 + S_2$ durch*

$$S_1 + S_2 = \{u + v \mid u \in S_1, v \in S_2\}$$

Definition. *Ein Vektorraum V ist die* direkte Summe *von W_1 und W_2, bezeichnet mit $V = W_1 \oplus W_2$, wenn $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume sind, so dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $W_1 + W_2 = V$.*

2.3 Linearkombinationen & lineare (Un-)Abhängigkeit

Definition. *Sei V ein Vektorraum und $\{\} \neq S \subseteq V$ eine Teilmenge. Einen Vektor $v \in V$ nennt man eine* Linearkombination der Elemente von *S, falls endlich viele Elemente $v_1, \dots, v_n \in S$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ existieren, so dass*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Theorem. *Sei $S \subseteq V$ eine nicht-leere Teilmenge, so ist die Menge W bestehend aus allen Linearkombinationen der Elemente von S ein Unterraum von V. Zudem ist es der kleinste Unterraum von V, der S enthält, d.h. W ist eine Teilmenge von jedem Unterraum von V, der S enthält.*

Definition. *Den Unterraum aller Linearkombinationen einer Menge S nennt man das* Erzeugnis von *S und man schreibt $\langle S \rangle$ oder* $\operatorname{span}(S)$*. Wenn $S = \{\}$, dann definieren wir $\langle S \rangle := \{0\}$.*

Definition. *Eine Teilmenge $S \subseteq V$ mit $\langle S \rangle = V$ heisst ein* Erzeugendensystem *von V.*

Definition. *$S \subseteq V$ heisst* linear abhängig*, wenn $\exists u_1, \dots, u_n \in V$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ nicht alle gleich 0, so dass*

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$$

S heisst linear unabhängig*, wenn S nicht linear abhängig ist.*

Theorem. *Für jede Teilmenge $S \subseteq V$ sind folgende äquivalent:*

a) S ist linear unabhängig.

b) Kein Element in S ist eine Linearkombination der übrigen Elemente von S.

c) Jeder Vektor in V besitzt höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S.

Theorem. *Sei V ein Vektorraum und $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Wenn S_1 linear abhängig ist, so ist S_2 dies auch.*

Korollar. *Sei V ein Vektorraum und $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Wenn S_2 linear unabhängig ist, so ist S_1 dies auch.*

2.4 Die Basis und die Dimension

Definition. *Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heisst* eine Basis *von V.*

Theorem. *Sei V ein Vektorraum und $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$ eine Teilmenge. S ist eine Basis von V dann und nur dann, wenn jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination der Vektoren in S dargestellt werden kann.*

Theorem. *Sei $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V und sei $v \in V \setminus S$. So gilt $S \cup \{v\}$ ist linear abhängig $\iff v \in \operatorname{span}(S)$.*

Theorem. *Sei $S \subseteq V$ eine endliche Teilmenge mit $\operatorname{span}(S) = V$, so existiert $S_0 \subseteq S$ mit S_0 eine Basis von V, d.h. V besitzt eine endliche Basis.*

Theorem (Steinitz'scher Austauschsatz)**.** *Sei V ein Vektorraum mit einer endlichen Basis $\mathcal{B}$ mit n Elementen. Sei $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig mit $m \leq n$. Dann existiert $S_0 \subseteq \mathcal{B}$ mit $n - m$ Elementen, so dass $\operatorname{span}(S \cup S_0) = V$.*

Korollar. *Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis mit genau n Elementen, so ist jede linear unabhängige Teilmenge von V mit n Elementen eine Basis.*

Korollar. *Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis mit n Elementen, so ist jede Teilmenge von V mit mehr als n Elementen linear abhängig und daraus folgt, dass jede linear unabhängige Teilmenge maximal n Elemente hat.*

Korollar. *Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis mit n Elementen, so hat jede Basis von V n Elemente.*

Definition. *Ein Vektorraum V heisst* endlich-dimensional*, wenn es eine Basis mit endlich vielen Elementen gibt. Die durch V eindeutig bestimmte Anzahl dieser Elemente nennt man die* Dimension *von V, abgekürzt* $\dim(V)$*. Ist ein Vektorraum nicht endlich-dimensional, so nennt man ihn* unendlich-dimensional.

Korollar. *Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und $S \subseteq V$, so dass $\operatorname{span}(S) = V$ und $|S| \leq n$. So ist S eine Basis und $|S| = n$.*

Korollar. *Sei $\mathcal{B}$ eine Basis eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und sei $S \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge. So existiert eine $S_0 \subseteq \mathcal{B}$, so dass $S \cup S_0$ eine Basis von V ist, d.h. jede linear unabhängige Teilmenge kann zu einer Basis erweitert werden.*

Theorem. *Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $\dim(V) = n < \infty$. So ist auch W endlich-dim. und $\dim(W) \leq \dim(V)$. Wenn $\dim(W) = \dim(V)$, dann $W = V$.*

2.5 Quotientenräume

Definition. *Gegeben ein endlich-dim. Vektorraum V über $\mathbb{K}$, ein Unterraum $W \subseteq V$ und ein Vektor $v \in V$. Wir definieren die* Nebenklasse *von W die v enthält durch*

$$\{v\} + W = \{v + w \mid w \in W\}$$

und schreiben kurz $v + W$.

Lemma. *Gegeben ein endlich-dim. Vektorraum V über $\mathbb{K}$, ein Unterraum $W \subseteq V$ sowie $v, v_1, v_2 \in V$.*

i) $v + W$ ist ein Unterraum $\iff v \in W$.

ii) $v_1 + W = v_2 + W \iff v_1 - v_2 \in W$.

Lemma. *Sei V ein endlich-dim. Vektorraum über $\mathbb{K}$, W ein Unterraum, V/W die Menge aller Nebenklassen von W und seien $+ : V/W \times V/W \to V/W$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V/W \to V/W$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} +(v_1 + W, v_2 + W) :=& (v_1 + v_2) + W \\ \cdot(\lambda, v + W) :=& (\lambda v) + W \end{aligned}$$

Dann sind $+, \cdot$ wohldefiniert und V/W mit den Verknüpfungen $+, \cdot$ ist ein Vektorraum.

Lemma. *Sei V ein Vektorraum, W ein Unterraum. Sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von W und seien $\{v_{m+1}, \ldots, v_n\} \subseteq V$ so dass $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist. Dann ist $\{v_{m+1} + W, \ldots, v_n + W\}$ eine Basis von V/W.*

Korollar. *Sei V ein Vektorraum, W ein Unterraum. Dann gilt*

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

2.6 Lineare Abbildungen, Kern, Bild und Rang

Definition. *Seien V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $T : V \to W$ heisst ($\mathbb{K}$-)linear, falls*

1) $\forall v_1, v_2 \in V : T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

2) $\forall v \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda v) = \lambda T(v)$

Definition. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir definieren den Kern und das Bild der Abbildung T durch*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T) :=& \{v \in V \mid T(v) = 0\} \\ \mathrm{Im}(T) :=& \{w \in W \mid \exists v \in V : w = T(v)\} \end{aligned}$$

Theorem. *Sei $T : V \to W$, so sind $\mathrm{Ker}(T)$ bzw. $\mathrm{Im}(T)$ Unterräume von V bzw. von W.*

Theorem. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, dann ist*

$$\mathrm{Im(T)} = \mathrm{span}\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$$

Definition. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Falls* $\operatorname{Ker}(T)$ *bzw.* $\operatorname{Im}(T)$ *endlich dimensionale Unterräume sind, definiert man*

$$\begin{aligned} \operatorname{nullity}(T) &:= \dim \operatorname{Ker}(T) \\ \operatorname{Rang}(T) &:= \dim \operatorname{Im}(T) \end{aligned}$$

Theorem. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei V endlich dimensional. Dann gilt*

$$\operatorname{nullity}(T) + \operatorname{Rang}(T) = \dim V$$

Theorem. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist T injektiv genau dann, wenn* $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$.

Theorem. *Sei $T : V \to W$ linear und seien* $\dim V = \dim W$. *Dann ist T injektiv genau dann, wenn T surjektiv ist.*

Theorem. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Sei $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$, dann existiert genau eine lineare Abbildung $T : V \to W$ so dass $T(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Korollar. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, $T, \tilde{T} : V \to W$ lineare Abbildungen mit $T(v_i) = \tilde{T}(v_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist $T \equiv \tilde{T}$.*

Definition. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, so definieren wir*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) := \{T : V \to W \mid T \textit{ ist } \mathbb{K}\textit{-linear}\}$$

und $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$.

Lemma. $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \subseteq \operatorname{Abb}(V, W)$ *ist ein Unterraum.*

Theorem. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, dann ist* $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ *mit der zusätzlichen Verknüpfung $T_1 \cdot T_2 := T_1 \circ T_2$ für alle $T_1, T_2 \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Ring.*

2.7 Lineare Abbildungen und ihre Darstellung durch Matrizen

Definition. *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Eine* geordnete Basis *von V ist eine endliche Folge linear unabhängiger Elemente in V, die V erzeugen.*

Definition. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$. Der* Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ *von v bezüglich $\mathcal{B}$ ist definiert durch*

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definition. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, $T : V \to W$ linear, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ geordnete Basen. Die* Darstellungsmatrix *von T bezüglich $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ist das eindeutige $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ mit*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

Wir schreiben $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$. *Wenn* $V = W$ *und* $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, *dann schreiben wir* $[T]_{\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Theorem. *Seien* V, W *Vektorräume über* $\mathbb{K}$ *und* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *geordnete Basen von* V *bzw.* W. *Seien* $T_1, T_2 : V \to W$ *lineare Abbildungen und* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Dann gelten*

i) $[T_1 + T_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} + [T_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

ii) $[\lambda \cdot T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \lambda [T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

2.8 Komposition von linearen Abbildungen und Matrixmultiplikation

Definition. *Seien* U, V, W *Vektorräume über* $\mathbb{K}$, $T : U \to V$ *und* $S : V \to W$ *linear. Dann ist* $ST : U \to W$ *definiert durch*

$$ST(u) := S(T(u)) \quad \forall u \in U$$

Theorem. *Seien* U, V, W *Vektorräume über* $\mathbb{K}$, $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$, $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, *dann ist* $ST \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$.

Theorem. *Seien* $T, S_1, S_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *Dann gelten*

i) $T(S_1 + S_2) = TS_1 + TS_2$, $(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$

ii) $T(S_1S_2) = (TS_1)S_2$

iii) $TI = IT = T$

iv) $\lambda(S_1S_2) = (\lambda S_1)S_2 = S_1(\lambda S_2)$

Definition. *Seien* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$ *so ist* $BA \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$ *definiert durch*

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj} \quad \forall 1 \leq i \leq p \forall 1 \leq j \leq n$$

Theorem. *Seien* $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$, $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ *und* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ *geordnete Basen von* U, V, W. *Dann gilt*

$$[ST]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Definition. *Das* Kronecker-δ *ist definiert durch*

$$\forall i, j \in \mathbb{Z} : \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Identitätsmatrix $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *ist definiert durch*

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Theorem. *Seien* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C, D \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$, *dann gelten*

i) $A(C + D) = AC + AD$, $(A + B)C = AC + BC$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}: \lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$

Theorem. *Seien $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von V, W. Dann gilt für alle $v \in V$*

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Definition. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dann ist die* Linksmultiplikationsabbildung *$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definiert durch*

$$L_A(v) := Av \quad \forall v \in \mathbb{K}^n$$

Definition. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Der* Kern *von A ist $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(L_A)$ und das* Bild *von A ist $\mathrm{Im}(L_A)$.*

Theorem. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ so ist $L_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Seien $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m$ die Standardbasen von $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$, dann gelten*

i) $[L_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} = A$

ii) $\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}): L_A = L_B \iff A = B$

iii) $\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \forall \lambda \in \mathbb{K}: L_{A+B} = L_A + L_B$, $L_{\lambda A} = \lambda L_A$

iv) $\forall T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \exists! C \in M_{m\times n}$ *so dass* $T = L_C$. *Es gilt* $C = [T]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}$.

v) $\forall E \in M_{n\times p}(\mathbb{K}): L_{AE} = L_A \circ L_E$

vi) Falls $m = n$, *dann ist* $L_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$

Theorem. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{K}), C \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$, dann ist $(AB)C = A(BC)$.*

2.9 Invertierbarkeit und Isomorphismen

Definition. *Sei $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. T heisst* invertierbar*, falls eine Abbildung $T^{-1} : W \to V$ existiert, so dass $T^{-1}T = \mathrm{id}_V$ und $TT^{-1} = \mathrm{id}_W$.*

Theorem. *Sei $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ invertierbar. Dann ist $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$.*

Definition. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A ist* invertierbar*, falls $\exists A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*

Lemma. *Sei $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Falls T invertierbar ist, gilt $\dim(V) = \dim(W)$.*

Theorem. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Sei $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann ist T genau dann invertierbar, wenn $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ invertierbar ist. Des Weiteren gilt $[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn L_A invertierbar ist. Des Weiteren gilt $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$.*

Definition. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. V und W sind* isomorph *($V \cong W$), falls $\exists T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ so dass T invertierbar ist. Ein invertierbarer Homomorphismus T heisst* Isomorphismus.

Theorem. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann ist $V \cong W$ genau dann, wenn $\dim(V) = \dim(W)$.*

Korollar. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, dann gilt $V \cong \mathbb{K}^n$.*

Theorem. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit Dimensionen n und m. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von V und W. Dann ist Φ ein Isomorphismus, wobei*

$$\Phi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{K}); \, T \mapsto [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

Korollar. $\dim \big(\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)\big) = \dim(V) \dim(W)$

2.10 Basiswechsel oder Koordinatentransformation

Theorem. *Seien V ein Vektorraum und $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ geordnete Basen von V. Sei $Q := [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Dann gelten*

i) *Q ist invertierbar.*

ii) $\forall v \in V : [v]_{\mathcal{B}} = Q[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

Bemerkung. *Seien V ein Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ geordnete Basen von V und $Q := [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Dann gilt $Q^{(j)} = [\tilde{v}_j]_{\mathcal{B}}$, wobei $Q^{(j)}$ die j-te Spalte von Q ist.*

Theorem. *Seien V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ geordnete Basen von V, sowie $Q := [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Sei $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$, dann gilt $[T]_{\tilde{\mathcal{B}}} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{B}}Q$.*

Definition. *Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann sind A, B* ähnlich, *wenn ein invertierbares $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existiert, so dass $B = Q^{-1}AQ$.*

2.11 Der Dualraum

Definition. *Der* Dualraum *von V ist der Vektorraum $V^* := \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$. Seine Elemente sind die* Linearformen *auf V.*

Lemma. $\dim V = \dim V^*$ *und insbesondere $V \cong V^*$.*

Definition. *Sei V ein Vektorraum. Der* Bidualraum *von V ist $V^{**} := (V^*)^*$.*

Theorem. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit geordneter Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und sei $\mathcal{B}^* := (f_1, \ldots, f_n) \in (V^*)^n$, wobei $\{f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ die Koordinatenfunktionen bezüglich $\mathcal{B}$ sind. Dann ist $\mathcal{B}^*$ eine geordnete Basis von V^* und für alle $f \in V^*$ gilt*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i$$

Die Basis $\mathcal{B}^*$ ist die duale Basis *zu $\mathcal{B}$.*

Theorem. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ geordnete Basen von V und W. Sei $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, und $T^* : W^* \to V^*$ definiert durch $T^*(g) := g \circ T$ für alle $g \in W^*$. Dann gilt*

1 $T^* \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$

2 $[T^*]^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*} = \big([T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\big)^T$

Definition. *Seien V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $v \in V$. Dann ist $\mathrm{ev}_v : V^* \to \mathbb{K}$ die Abbildung definiert durch $\mathrm{ev}_v(f) := f(v)$ für alle $f \in V^*$.*

Bemerkung. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $v \in V$. Dann ist* $\mathrm{ev}_v \in V^{**}$.

Lemma. *Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $v \in V$. Falls $\mathrm{ev}_v(f) = 0$ für alle $f \in V^*$, dann ist $v = 0$.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann ist die Abbildung $\psi : V \to V^{**}$, $\psi(v) := \mathrm{ev}_v$ ein Isomorphismus.*

Korollar. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Jede geordnete Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* ist die duale Basis zu einer geordneten Basis $\mathcal{B}$ von V.*

3 Lineare Gleichungssysteme & Matrizen

3.1 Elementare Zeilenumformungen und Elementarmatrizen

Definition. *Die* elementaren Zeilen- (bzw. Spalten-) Unformungen *sind:*

Typus I: *Das Vertauschen zweier Zeilen (Spalten).*

Typus II: *Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit $\lambda \in \mathbb{K}^\times$.*

Typus III: *Addition des λ-fachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen ($\lambda \in \mathbb{K}$).*

Definition. *Eine $n \times n$-Matrix heisst* Elementarmatrix, *wenn sie aus Anwendung einer elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformung auf I_n resultiert.*

Theorem. *Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und sei B entstanden aus A durch Anwendung einer elementaren Zeilenumformung. Dann existiert eine $m \times m$-Elementarmatrix E, so dass $B = EA$. E erhält man, indem man dieselbe elementare Zeilenumformung auf I_m anwendet. Sei umgekehrt E eine $m \times m$-Elementarmatrix, dann ist $EA \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ mittels elementarer Zeilenumformung aus A etstanden. Die analoge Aussage gilt für Spaltenumformungen, d.h. sei B entstanden aus A durch Anwendung einer elementaren Spaltenumformung, dann ist $B = AE$, wobei E eine $n \times n$-Elementarmatrix ist.*

Theorem. *Elementarmatrizen sind invertierbar und ihre Inversen sind ebenfalls Elementarmatrizen.*

3.2 Der Rang einer Matrix und Matrixinversen

Definition. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dann ist der* Rang *von A gegeben durch* $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(L_A)$.

Theorem. *Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von V und W. Dann ist* $\mathrm{Rang}(T) = \mathrm{Rang}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$.

Theorem. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $P \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und seien P und Q invertierbar. Dann ist* $\mathrm{Rang}(PAQ) = \mathrm{Rang}(A)$.

Korollar. *Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen erhalten den Rang.*

Definition. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dann ist der* Spaltenraum *von A der Unterraum von $\mathbb{K}^m$, der von den Spalten von A aufgespannt wird, d.h.*

$$\mathrm{Spaltenraum}(A) = \mathrm{span}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} = \mathrm{Im}(L_A)$$

Der Zeilenraum *von A ist der Unterraum von $\mathbb{K}^n$, der von den Zeilen von A aufgespannt wird, d.h.*

$$\text{Zeilenraum}(A) = \text{span}\{A_{(1)}, \ldots, A_{(m)}\}$$

Theorem. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dann ist* $\text{Rang}(A)$ *gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten von A, d.h.* $\text{Rang}(A) = \dim \text{Spaltenraum}(A)$.

Theorem. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $r = \text{Rang}(A)$, dann ist $r \leq \min\{m, n\}$ und mittels endlich vieler elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen lässt sich A in $D \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ überführen, wobei*

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \textit{ und } i \leq r \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Korollar. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, und sei $r = \text{Rang}(A)$, dann existieren invertierbare $B \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, so dass $D = BAC$, wobei*

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \textit{ und } i \leq r \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Korollar. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dann gelten*

i) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$

ii) $\text{Rang}(A) = \dim \text{Zeilenraum}(A)$

iii) $\dim \text{Zeilenraum}(A) = \dim \text{Spaltenraum}(A)$

Korollar. *Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*

Proposition. *Seien V, W, Z Vektorräume über $\mathbb{K}$ und seien $T \in \text{Hom}(V, W)$, $S \in \text{Hom}(W, Z)$. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Dann gelten*

i) $\text{Rang}(ST) \leq \text{Rang}(S)$

ii) $\text{Rang}(ST) \leq \text{Rang}(T)$

iii) $\text{Rang}(AB) \leq \text{Rang}(A)$

iv) $\text{Rang}(AB) \leq \text{Rang}(B)$

Bemerkung. *Die Menge $\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A \textit{ ist invertierbar}\}$ ist eine Gruppe mit neutralem Element I_n.*

Definition. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$, dann ist die* erweiterte Matrix $(A \mid B) \in M_{m\times(n+p)}(\mathbb{K})$ *die Matrix*

$$(A \mid B)^{(j)} = \begin{cases} A^{(j)} & \textit{falls } 1 \leq j \leq n \\ B^{(j-n)} & \textit{sonst} \end{cases}$$

3.3 Lineare Gleichungssysteme: theoretische Überlegungen

Definition. *Ein System $Ax = b$ (über $\mathbb{K}$) mit m Gleichungen in n Unbekannten heisst* homogen*, falls $b = 0$. Sonst heisst es* inhomogen.

Theorem. *Sei $Ax = 0$ ein homogenes System über $\mathbb{K}$ mit m Gleichungen in n Unbekannten. Sei $\mathscr{L}$ die Lösungsmenge des Systems. Dann gilt $\mathscr{L} = \mathrm{Ker}(L_A)$ und somit ist $\mathscr{L}$ ein Unterraum und $\dim \mathscr{L} = n - \mathrm{Rang}(A)$.*

Korollar. *Sei $m < n$ und $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dann besitzt das System $Ax = 0$ nicht-triviale Lösungen.*

Theorem. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$. Sei $\mathscr{L}$ die Lösungsmenge des Systems $Ax = b$ und sei $\mathscr{L}_H$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$, so gilt $\mathscr{L} = v_0 + \mathscr{L}_H$ für jedes $v_0 \in \mathscr{L}$.*

Theorem. *Sei $Ax = b$ ein System von n Gleichungen in n Unbekannten, und sei A invertierbar. Dann hat das System genau eine Lösung $A^{-1}b$. Umgekehrt gilt, falls das System genau eine Lösung hat, dann ist A invertierbar.*

Theorem. *Das System $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b)$.*

3.4 Lineare Gleichungssysteme: Die Gauss-Elimination

Definition. *Zwei LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten heissen* äquivalent*, falls ihre Lösungsmengen gleich sind.*

Theorem. *Sei $Ax = b$ ein LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten, und sei $C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Dann sind die LGS $Ax = b$ und $(CA)x = Cb$ äquivalent.*

Korollar. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Sei $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ erhalten aus $(A \mid b)$ mittels elementarer Zeilenumformungen. Dann gilt $Ax = b \iff \tilde{A}x = \tilde{b}$.*

Definition. *Eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ist in* Zeilenstufenform*, wenn*

i) Zeilen mit Einträgen alle gleich null stehen zuunterst.

ii) Der erste von null verschiedene Eintrag in einer Zeile (genannt Pivot*) ist der einzige von null verschiedene Eintrag in der jeweiligen Spalte.*

iii) Der erste von null verschiedene Eintrag in einer Zeile ist gleich 1 und steht in einer Spalte rechts des ersten von null verschiedenene Eintrags der vorangehenden Zeile.

Theorem. *Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch eine endliche Folge elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen.*

Algorithmus. *Um ein LGS von der Form $Ax = b$ in n Unbekannten zu lösen, kann man wie folgt vorgehen:*

(1) Bilde die erweiterte Matrix $(A \mid b)$

(2) Führe $(A \mid b)$ mittels Gauss-Elimination in eine Matrix $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ in Zeilenstufenform über.

(3) Existiert eine Zeile mit dem einzigen von null verschiedenen Eintrag in der letzten Spalte, dann besitzt das LGS keine Lösung und der Algorithmus gibt die leere Menge zurück.

(4) Partitioniere die Variablen $x_1, \dots, x_n$ in zwei Gruppen – die $m' := \mathrm{Rang}(A)$ Pivotvariablen und die $n-m'$ nicht-Pivotvariablen – und ersetze die nicht-Pivotvariablen durch neue Variablen $t_1, \dots, t_{n-m'}$.

(5) Lese die allgemeine Lösung v ab:

$$v = v_0 + t_1 u_1 + \cdots + t_{n-m'} u_{n-m'}$$

Theorem. *Sei $Ax = b$ ein LGS mit m nicht-trivialen Gleichungen in n Unbekannten. Sei $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b)$ und $(A \mid b)$ in Zeilenstufenform. Dann ist*

i) $\mathrm{Rang}(A) = m$

ii) Sei $v = v_0 + t_1 u_1 + \cdots + t_{n-m} u_{n-m}$ $(t_1, \dots, t_{n-m} \in \mathbb{K})$ die allgemeine Lösung von $Ax = b$. Dann ist $\{u_1, \dots, u_{n-m}\}$ eine Basis der Lösungsmenge von $Ax = 0$ und v_0 eine Lösung von $Ax = b$.

3.5 Dreiecksmatrizen und die LR-Zerlegung

Definition. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A heisst*

i) obere Dreiecksmatrix*, falls $i > j \implies A_{ij} = 0$.*

ii) untere Dreiecksmatrix*, falls $i < j \implies A_{ij} = 0$.*

Definition. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A ist eine* Permutationsmatrix*, falls jede Zeile und jede Spalte, genau einen Eintrag gleich eins und sonst nur Einträge gleich null besitzen.*

Definition. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A ist eine* Diagonalmatrix*, falls $i \neq j \implies A_{ij} = 0$.*

Theorem. *i) Jede $n \times n$ obere Dreiecksmatrix mit diagonalen Einträgen alle gleich eins, kann durch eine endliche Folge elementarer Zeilenumformungen der Form "addiere ein Vielfaches einer späteren Zeile zu einer früheren" in die Identität I_n überführt werden und ist somit das Produkt von Typ III Matrizen.*

ii) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ obere Dreiecksmatrizen, dann sind $A+B$ und AB obere Dreiecksmatrizen.

iii) Eine obere Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn alle Diagonaleinträge von 0 verschieden sind.

iv) Obige Aussagen gelten analog für untere Dreieckmatrizen.

Theorem. *Für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existieren eine Permutationsmatrix $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und eine invertierbare untere Dreiecksmatrix $L \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, so dass LPA eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Theorem. *Für jedes $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existieren eine Permutationsmatrix P, eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L sowie eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = PLR$.*

4 Determinanten

4.1 Determinante einer 2×2-Matrix

Definition. *Sei* $A = \left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, *dann ist*

$$\det(A) := A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Theorem. *Seien* $A_{(1)}$, $A'_{(1)}$, $A_{(2)}$, $A'_{(2)} \in \mathbb{K}^2$ *Zeilen, sei* $c \in \mathbb{K}$, *dann gelten*

a) $$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} cA_{(1)}+A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} &= c\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ cA_{(2)}+A'_{(2)} \end{pmatrix} &= c\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A'_{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Falls $A_{(1)} = A_{(2)}$, *dann ist* $\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} = 0$

c) $\det(I_2) = 1$

Theorem. *Sei* $\delta : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

i) $\delta(A)$ *ist linear in den Zeilen von* $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

ii) Für jede Zeile $A_{(1)} \in \mathbb{K}^2$ *gilt* $\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(1)} \end{pmatrix} = 0$.

iii) $\delta(I_2) = 1$

Dann ist $\delta = \det$.

4.2 Determinante einer $n \times n$-Matrix

Definition. *Seien* $V_1, \ldots, V_n, W$ *Vektorräume über* $\mathbb{K}$ *und* $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ *eine Abbildung.* f *heisst* multilinear *oder* n-linear, *falls* f *in jedem Argument linear ist.*

Definition. *Eine Abbildung* $\delta : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *ist multilinear, falls sie linear ist in den Zeilen, d.h. für alle Zeilen* $A_{(1)}, \ldots, A_{(m)}$ *sowie* $A'_{(i)} \in \mathbb{K}^n$ *und für alle* $c \in \mathbb{K}$ *gilt*

$$\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix} = c\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix}$$

Proposition. *Eine Linearkombination zweier multilinearer Abbildungen ist wieder multilinear.*

Korollar. *Eine Linearkombination multilinearer Abbildungen ist wieder multilinear.*

Definition. *Eine multilineare Abbildung* $\delta : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heisst* alternierend, *falls gilt*

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\exists 1 \leq i < m : A_{(i)} = A_{(i+1)}) \implies \delta(A) = 0$$

Proposition. *Sei* $\delta : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine alternierende multilineare Abbildung. Seien* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Dann gelten*

i) Falls B *mittels Vertauschung zweier Zeilen aus* A *entstanden ist, gilt* $\delta(B) = -\delta(A)$.

ii) Falls $1 \leq i < j \leq m$ *existieren, so dass* $A_{(i)} = A_{(j)}$, *dann ist* $\delta(A) = 0$.

Definition. *Eine* Determinante *auf* $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *ist eine alternierende multilineare Abbildung* $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, *so dass* $\delta(I_n) = 1$.

Proposition. *Sei* $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine alternierende multilineare Abbildung. Sei* $1 \leq j \leq n+1$ *und definiere*

$$\forall A \in M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K}) : \varepsilon_j(A) := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} A_{ij} \delta(\tilde{A}_{ij})$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *die aus* A *nach Streichung der* i*-ten Zeile und der* j*-ten Spalte erhaltene Matrix ist. Dann ist* $\varepsilon_j : M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *multilinear und alternierend. Falls* δ *eine Determinante auf* $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *ist, so ist* ε_j *eine Determinante auf* $M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K})$.

Korollar. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *existiert eine Determinante auf* $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

4.3 Eigenschaften von Determinanten

Theorem. *Sei* δ *eine Determinante auf* $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Seien* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

i) Ist B *entstanden aus* A *durch Multiplikation einer Zeile mit* $c \in \mathbb{K}$. *Dann ist* $\delta(B) = c\delta(A)$.

ii) Sind zwei Zeilen von A *identisch, dann ist* $\delta(A) = 0$.

iii) Ist B *entstanden aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen, dann ist* $\delta(B) = -\delta(A)$.

iv) Sind die Einträge einer Zeile von A *alle gleich null, dann ist* $\delta(A) = 0$.

v) Ist B *entstanden durch Addition eines Vielfachen der* j*-ten Zeile von* A *zur* i*-ten Zeile von* A, *wobei* $1 \leq i, j \leq n$ *mit* $i \neq j$. *Dann ist* $\delta(B) = \delta(A)$.

Korollar. *Sei* δ *eine Determinante auf* $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *und sei* $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *eine Elementarmatrix.*

i) Falls E *die Matrix zur Multiplikation einer Zeile mit* $c \in \mathbb{K}^\times$ *ist (Typ I), dann ist* $\delta(E) = c$.

ii) Falls E *die Matrix zur Vertauschung zweier Zeilen ist (Typ II), dann ist* $\delta(E) = -1$.

iii) Falls E die Matrix zur Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ist (Typ III), dann ist $\delta(E) = 1$.

Theorem. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $\mathrm{Rang}(A) < n$. Dann ist $\delta(A) = 0$.*

Lemma. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine Elementarmatrix. Dann ist $\delta(EA) = \delta(E)\delta(A)$.*

Theorem. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann ist $\delta(AB) = \delta(A)\delta(B)$.*

Korollar. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dann ist $\delta(A) \in \mathbb{K}^\times$ und $\delta(A^{-1}) = \delta(A)^{-1}$.*

Korollar. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann sind folgende äquivalent:*

i) $\delta(A) = 0$

ii) A ist nicht invertierbar

iii) $\mathrm{Rang}(A) < n$

Theorem. *Es gibt genau eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann gilt*

$$\forall 1 \leq j \leq n: \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$$

4.4 Berechnung von Determinanten

Theorem. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann ist $\det(A^T) = \det(A)$.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, seien $1 \leq i^*, j^* \leq n$, dann ist*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j^*} A_{ij^*} \det(\tilde{A}_{ij^*}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i^*+j} A_{i^*j} \det(\tilde{A}_{i^*j})$$

Theorem. *Die Determinante einer oberen (einer unteren) Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge. Insbesondere ist eine obere (eine untere) Dreiecksmatrix genau dann invertierbar, wenn alle Diagonaleinträge nicht null sind.*

4.5 Endomorphismen und Determinanten

Theorem. *Die Determinanten ähnlicher Matrizen sind gleich.*

Definition. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$, dann ist $\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$, wobei $\mathcal{B}$ eine beliebige geordnete Basis von V ist.*

Theorem. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $T, \tilde{T} \in \mathrm{End}(V)$ beliebig. Es gelten:*

i) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$

ii) $\det(T \circ \tilde{T}) = \det(T)\det(\tilde{T})$

iii) *T ist genau dann ein Automorphismus, wenn* $\det(T) \neq 0$ *und in diesem Fall ist* $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$.

iv) *Sei $S : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist* $\det(S \circ T \circ S^{-1}) = \det(T)$.

5 Endomorphismen und Eigenwerte

5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Theorem. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{K}^n$. So gilt $[L_A]_\mathcal{B} = Q^{-1}AQ$, wobei $Q = (u_1, \ldots, u_n)$.*

Theorem. *Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ähnlich zu $[T]_\mathcal{B}$. Dann existiert eine geordnete Basis $\tilde{\mathcal{B}}$, sodass $A = [T]_{\tilde{\mathcal{B}}}$.*

Definition. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. T heisst* diagonalisierbar*, wenn eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass $[T]_\mathcal{B}$ eine Diagonalmatrix ist. Eine $n \times n$-Matrix A heisst* diagonalisierbar*, wenn A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.*

Theorem. *Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V und $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist $T \in \mathrm{End}(V)$ genau dann diagonalisierbar, wenn $[T]_\mathcal{B}$ diagonalisierbar ist.*

Korollar. *Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn L_A diagonalisierbar ist.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist T genau dann diagonalisierbar, wenn eine geordnete Basis $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ von V und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ existieren, so dass für alle $1 \leq j \leq n$ gilt $T(u_j) = \lambda_j u_j$. In diesem Falle ist*

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$. Ein Vektor $u \in V \setminus \{0\}$ heisst* Eigenvektor *von T, wenn ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, so dass gilt $T(u) = \lambda u$. Der Skalar λ ist der zu u gehörige* Eigenwert *von T. Analog ist ein $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ein* Eigenvektor *der Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, wenn ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, so dass gilt $L_A(u) = Au = \lambda u$. Man nennt λ wieder den zu u gehörigen Eigenwert von A.*

Theorem. *Seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von T, wenn $\det(T - \lambda \mathrm{id}_V) = 0$ gilt.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I_n) = 0$ gilt.*

Definition. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{K}$ ist das Polynom*

$$\mathrm{char}_A(X) := \det(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X].$$

Bemerkung. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist $A - XI_n$ eine Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{K}[X])$ und die Abbildung* $\det : M_{n\times n}(\mathbb{K}[X]) \to \mathbb{K}[X]$ *ist die Determinante definiert wie in der linearen Algebra I.*

Proposition. *Je zwei ähnliche Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$ haben dasselbe charakteristische Polynom.*

Definition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Das charakteristische Polynom von T ist definiert als*

$$\mathrm{char}_T(X) := \det([T]_{\mathcal{B}} - XI_n)$$

für eine beliebige geordnete Basis $\mathcal{B}$.

5.2 Diagonalisierbarkeit

Theorem. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und seien $u_1, \ldots, u_k \in V$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ von T, d.h. für alle $1 \leq j \leq k$ sei $T(u_j) = \lambda_j u_j$. Dann ist die geordnete Menge $(u_1, \ldots, u_k)$ linear unabhängig.*

Korollar. *Seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n = \dim(V)$. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ von T. Dann ist T diagonalisierbar.*

Definition. *Wir sagen ein Polynom $p(X) \in \mathbb{K}[X]$* zerfällt über $\mathbb{K}$ in Linerfaktoren, *wenn man es schreiben kann als*

$$p(X) = a_0(X - a_1)\cdots(X - a_n)$$

für Skalare $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Theorem. *Das charakteristische Polynom eines diagonalisierbaren Endomorphismus zerfällt in Linearfaktoren.*

Definition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Sei λ_j ein Eigenwert von T, dann ist die* algebraische Multiplizität *m_j von λ_j gegeben durch*

$$m_j := \max\left\{k \in \mathbb{Z} \mid \exists p(X) \in \mathbb{K}[X] : \mathrm{char}_T(X) = (X - \lambda_j)^k p(X)\right\}$$

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $T \in \mathrm{End}(V)$ und λ_j ein Eigenwert von T. Setze*

$$E_{\lambda_j} := \{u \in V \mid T(u) = \lambda_j u\} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_j \mathrm{id}_V).$$

Wir nennen E_{λ_j} den Eigenraum *von T zum Eigenwert λ_j und $\dim(E_{\lambda_j})$ die* geometrische Multiplizität *von λ_j.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $T \in \mathrm{End}(V)$ und λ_j ein Eigenwert von T mit algebraischer Multiplizität m_j. So gilt $1 \leq \dim(E_{\lambda_j}) \leq m_j$.*

Lemma. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ paarweise verschiedene Eigenwerte von T. Angenommen $v_1, \dots, v_k \in V$, so dass für alle $1 \leq i \leq k$ gilt $v_i \in E_{\lambda_i}$, und sei weiter $v_1 + \cdots + v_k = 0$. Dann gilt $v_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$.*

Theorem. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ paarweise verschiedene Eigenwerte von T. Für jedes $1 \leq i \leq k$ sei $S_i \subseteq E_{\lambda_i}$ eine linear unabhängige Teilmenge. Dann ist $S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_k$ eine linear unabhängige Menge.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass $\mathrm{char}_T(X)$ über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T. Dann gilt:*

1) *T ist diagonalisierbar $\iff$ für alle $1 \leq j \leq k$ gilt $m_j = \dim(E_{\lambda_j}) \iff V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$.*
2) *Wenn T diagonalisierbar ist und für jedes $1 \leq i \leq k$ die Menge $S_i \subseteq E_{\lambda_i}$ eine Basis von E_{λ_i} ist, dann ist $S := S_1 \cup \cdots \cup S_k$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von T.*

5.3 Der Satz von Cayley-Hamilton

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Ein Unterraum $W \subseteq V$ heisst* T-invariant*, falls $T(W) \subseteq W$ ist, d.h. $\forall u \in W : T(u) \in W$ gilt.*

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei $u \in V$. Wir nennen den Unterraum*

$$W := \mathrm{span}\big(\{T^k(u) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\big)$$

den von u aufgespannten T-zyklischen *Unterraum von V.*

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Sei $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum, dann ist $T_W : W \to W$, $u \mapsto T_W(u) := T(u)$ die* Einschränkung *von T auf W.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in$ End. Wenn $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum ist, so teilt das Polynom $\mathrm{char}_{T_W}(X)$ das Polynom $\mathrm{char}_T(X)$ in $\mathbb{K}[X]$.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Sei $u \in V \setminus \{0\}$ und $W := \mathrm{span}\big(\{T^l(u) \mid l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\big)$. Sei $k := \dim W$. Dann gelten*

i) *$k \geq 0$ und $\{T^l(u) \mid 0 \leq l < k\}$ ist eine Basis von W.*
ii) *Seien $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$, sodass $T^k(u) = -a_0 u - \cdots - a_{k-1} T^{k-1}(u)$, dann ist*
$$\mathrm{char}_{T_W}(X) = (-1)^k (a_0 + a_1 X + \cdots + a_{k-1} X^{k-1} + X^k).$$

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $\mathrm{char}_T(X)$. Dann gilt $\mathrm{char}_T(T) = 0$ in $\mathrm{End}(V)$.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ mit charakteristischem Polynom $\mathrm{char}_A(X)$, dann ist $\mathrm{char}_A(A) = 0$ in $M_{n \times n}(\mathbb{K})$.*

5.4 Spezielle Endomorphismen: Involutionen, Projektionen und nilpotente Abbildungen

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $T \in \mathrm{End}(V)$ heisst*

i) Involution, *falls $T \circ T = \mathrm{id}_V$.*

ii) Projektion, *falls $T \circ T = T$.*

iii) nilpotent, *falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $T^k = 0$.*

Proposition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, in welchem $2 \neq 0 ist$. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine Involution. Dann sind alle Eigenwerte von T in $\{\pm 1\}$ und $V = E_1 \oplus E_{-1}$. Insbesondere ist T diagonalisierbar.*

Proposition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $\mathfrak{P} \subseteq \mathrm{End}(V)$ die Menge aller Projektionen $P : V \to V$ und sei*

$$\mathfrak{W} = \{(W_1, W_2) \mid W_i \subseteq V \textit{ ist ein Unterraum und } V = W_1 \oplus W_2\}$$

die Menge aller Paare von Unterräumen mit trivialem Schnitt, deren Vereinigung V erzeugt. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} F_1 : \mathfrak{P} &\to \mathfrak{W} \\ p &\mapsto \big(\mathrm{Im}(P), \mathrm{Ker}(P)\big) \\ F_2 : \mathfrak{W} &\to \mathfrak{P} \\ (W_1, W_2) &\mapsto P \in \mathcal{P} \textit{ die Projektion auf } W_1 \textit{ parallel zu } W_2 \end{aligned}$$

sind wohldefiniert und zueinander invers. Zudem gilt $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_V - P)$ für alle $P \in \mathfrak{P}$.

Proposition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $P \in \mathrm{End}(V)$ eine Projektion. Dann gelten*

i) Die Eigenwerte von P liegen in $\{0, 1\}$ und $V = \mathrm{Ker}(P) \oplus E_1$. Insbesondere ist P diagonalisierbar und $E_1 = \mathrm{Im}(P)$.

ii) Sei $P^\perp := \mathrm{id}_V - P$, dann ist $P^\perp \circ P^\perp = P^\perp$. Es ist $\mathrm{Ker}(P^\perp) = \mathrm{Im}(P)$ und $\mathrm{Im}(P^\perp) = \mathrm{Ker}(P)$.

Proposition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n = \dim(V)$, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent. Dann ist $T^n = 0$. Sei $u \in V \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$, sodass $T^k(u) = 0$ und $T^{k-1}(u) \neq 0$ gelten. Dann ist die Menge $\{T^l(u) \mid 0 \leq l < k\}$ linear unabhängig.*

6 Euklidische Vektorräume

6.1 Reelle Skalarprodukte und Normen

Definition. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein* reelles Skalarprodukt *(auch ein* inneres Produkt*) auf V ist eine Funktion $V \times V \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$, sodass folgende gelten:*

i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ für alle $u, v, w \in V$, *ii)* $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *für alle* $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ *für alle* $u, v \in V$ *und*

iv) $\langle u, u\rangle > 0$ *für alle* $u \in V \setminus \{0\}$.

Definition. *Ein* Euklidischer Vektorraum *ist ein Tupel* $(\mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *wobei* V *ein* $\mathbb{R}$-*Vektorraum und* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V *ist.*

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Euklidischer Vektorraum und sei* $v \in V$, *dann gelten:*

i) $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ *und*

ii) falls $w \in V$ *sodass* $\forall u \in V : \langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, *dann ist* $v = w$.

Definition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Euklidischer Vektorraum, dann ist die (von* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *induzierte)* Norm *die Funktion* $V \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \quad (v \in V).$$

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Euklidischer Vektorraum, dann gelten für alle* $u, v \in V$ *und* $lambda \in \mathbb{R}$*:*

i) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$,

ii) $\|u\| \geq 0$ *und* $\|u\| = 0 \iff u = 0$,

iii) (Cauchy-Schwarz Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ *und*

iv) (Dreiecksungleichung) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Definition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Euklidischer Vektorraum, und seien* $v, w \in V$, $S \subseteq V$.

i) v *ist ein* Einheitsvektor*, falls* $\|v\| = 1$.

ii) v, w *sind* orthogonal*, falls* $\langle v, w\rangle = 0$.

iii) S *ist* orthogonal*, falls alle paarweise verschiedenen Paare von Vektoren in* S *orthogonal sind.*

iv) S *ist* orthonormal*, falls* S *orthogonal ist und alle Elemente in* S *Einheitsvektoren sind.*

6.2 Gram-Schmidt Orthogonalisierung

Definition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Euklidischer Vektorraum. Eine geordnete Teilmenge* $\mathcal{B}$ *von* V *heisst* Orthonormalbasis *(ONB) von* V, *falls* $\mathcal{B}$ *eine geordnete Basis von* V *und die Menge* $\mathcal{B}$ *orthonormal ist.*

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Euklidischer Vektorraum, und sei* $S = (v_1, \ldots, v_k)$ *eine geordnete, orthogonale Teilmenge von* V *und sei* $0 \notin S$. *Falls* $w = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ *für Skalare* $a_i \in \mathbb{R}$, *dann gilt*

$$a_i = \frac{\langle v_i, w\rangle}{\|v_i\|^2} \quad (1 \leq i \leq k).$$

Korollar. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $S = (v_1, \dots, v_k)$ eine geordnete, orthonormale Teilmenge von V. Falls $w \in \operatorname{span}(S)$, dann ist $w = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, w\rangle v_i$.*

Korollar. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $S = (v_1, \dots, v_k)$ eine geordnete, orthogonale Teilmenge von V und sei $0 \notin S$. Dann ist S linear unabhängig.*

Theorem. *Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $S = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete, linear unabhängige Teilmenge von V. Definiere*

$$w_1 = v_1 \quad \textit{und} \quad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k\rangle}{\|w_j\|^2} w_j \quad (2 \leq k \leq n).$$

Dann ist $\tilde{S} = (w_1, \dots, w_n)$ eine geordnete orthogonale Teilmenge von V, deren Elemente alle von 0 verschieden sind, und die $\operatorname{span}(S) = \operatorname{span}(\tilde{S})$ erfüllt.

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, dann besitzt V eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$. Wenn $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ist, dann gilt für alle $v \in V$ die Formel $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v\rangle v_i$.*

Korollar. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von V und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Sei $A = [T]_{\mathcal{B}}$, dann gilt $A_{ij} = \langle v_j, T(v_i)\rangle$, $(1 \leq i, j \leq \dim V)$.*

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $S \subseteq V$. Dann ist*

$$S^{\perp} = \{u \in V \mid \forall v \in S : \langle u, v\rangle = 0\}.$$

Proposition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, sei $W \subseteq V$ ein endlichdimensionaler Unterraum und sei $(v_1, \dots, v_k)$ eine ONB von W. Sei $v \in V$, dann existiert ein eindeutiges $z \in W^{\perp}$, sodass*

$$v = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, v\rangle v_i + z.$$

Korollar. *Sei $(v_1, \dots, v_k)$ eine geordnete orthonormale Teilmenge eines Euklidischen Vektorraums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Seien $W = \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_k\}) \subseteq V$ und $y \in V$. Der Vektor $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, v\rangle v_i$ ist das eindeutige Element in W mit den Eigenschaften*

i) $y - \tilde{y} \in W^{\perp}$,

ii) $\forall w \in W : \|y - \tilde{y}\| \leq \|y - w\|$.

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum der Dimension n. Sei $S = (v_1, \dots, v_k)$ eine geordnete orthonormale Teilmenge von V. Dann gelten:*

i) Die Menge S lässt sich zu einer geordneten orthonormalen Basis $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ von V erweitern,

ii) sei $W = \operatorname{span}(S)$, dann ist $\tilde{S} = (v_{k+1}, \dots, v_n)$ eine geordnete orthonormale Basis von $W^{\perp}$,

iii) sei $W \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$.

6.3 Adjungierte Abbildungen

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung $\Phi : V \to V^*$, $v \mapsto \Phi_v$ mit $\Phi_v(u) = \langle u, v\rangle$ für alle $u \in V$ ein Isomorphismus mit Inverse $\Phi^{-1} : V^* \to V$ gegeben wie folgt: Sei $f \in V^*$, dann ist $\Phi^{-1}(f) \in V$ der eindeutig bestimmte Vektor in V, der für alle $u \in V$ die Gleichung $\langle u, \Phi^{-1}(f)\rangle = f(u)$ erfüllt.*

Theorem. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale Euklidische Vektorräume und sei $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $T^* \in \mathrm{Hom}(W,V)$ mit der Eigenschaft*

$$\forall v \in V \forall w \in W : \langle Tv, w\rangle_W = \langle v, T^*w\rangle_V.$$

Theorem. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale Euklidische Vektorräume. Seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ geordnete orthonormale Basen von V bzw. von W und sei $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Dann gilt*

$$[T^*]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^T.$$

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, dann ist $(L_A)^* = L_{A^T}$.*

Theorem. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale Euklidische Vektorräume, seien $T, T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$,

ii) $(\lambda T)^* = \lambda T^*$,

iii) $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$,

iv) $(T^*)^* = T$, *sowie*

v) $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$.

Korollar. *Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

ii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,

iii) $(AB)^T = B^TA^T$,

iv) $(A^T)^T = A$, *sowie*

v) $I_n^T = I_n$.

6.4 Selbstadjungierte Abbildungen und der erste Spektralsatz

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$. T ist* Selbstadjungiert, *falls $T = T^*$ gilt.*

Lemma. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von T, dann ist die Zerlegung $V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$ T-invariant.*

Lemma. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $\dim V > 0$, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann besitzt T einen reellen Eigenwert.*

Theorem (Spektralsatz I)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann existiert eine geordnete Orthonormalbasis von V, deren Elemente alles Eigenvektoren von T sind.*

Korollar. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann ist T diagonalisierbar.*

Definition. *Die* orthogonale Gruppe *ist die Gruppe*

$$O(n) = \{Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \mid Q^{-1} = Q^T\}$$

mit neutralem Element I_n und Verknüpfung vererbt von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.

Theorem (Hauptachsentransformation)**.** *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann existiert eine orthogonale Matrix $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sodass*

$$D = Q^{-1}AQ = Q^T AQ$$

eine reelle Diagonalmatrix ist.

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann ist A diagonalisierbar und alle Eigenwerte von A sind reell.*

Korollar. *Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und angenommen V besitzt eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von T. Dann ist T selbstadjungiert.*

6.5 Orthogonale Abbildungen

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. T heisst* orthogonal*, falls*

$$\forall u, v \in V : \langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Definition. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(V)$ heisst* Isometrie*, falls*

$$\forall u, v \in V : \|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|.$$

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Folgende sind äquivalent:*

i) $\forall u, v \in V : \langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$.

ii) $TT^* = T^*T = \mathrm{id}_V$.

iii) Sei $\mathcal{B}$ eine ONB von V, dann ist $T(\mathcal{B})$ eine ONB von V.

iv) Es existiert eine ONB $\mathcal{B}$ von V, sodass $T(\mathcal{B})$ eine ONB von V ist.

v) T ist eine Isometrie.

Lemma. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ selbstadungiert. Wenn $\langle v, Tv\rangle$ für alle $v \in V$ ist, dann ist $T = 0$.*

Korollar. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Folgende sind äquivalent:*

i) V besitzt eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von T zu Eigenwerten, deren Absolutbetrag allesamt gleich 1 ist.

ii) T ist selbstadjungiert und orthogonal.

Definition. *Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. A und B hiessen* orthogonal äquivalent, *falls eine orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ existiert, sodass $Q^T AQ = B$.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ orthogonal äquivalent zu einer Diagonalmatrix, dann ist A symmetrisch.*

7 Bilinearformen

7.1 Bilinearformen

Definition. *Eine* Bilinearform *auf einem Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung*

$$\beta : V \times V \to \mathbb{K},\ (u, v) \mapsto \beta(u, v),$$

sodass für alle $u, u', v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende gelten:

- $\beta(u, v + v') = \beta(u, v) + \beta(u, v')$.
- $\beta(u + u', v) = \beta(u, v) + \beta(u', v)$.
- $\beta(u, \lambda v) = \lambda\beta(u, v)$.
- $\beta(\lambda u, v) = \lambda\beta(u, v)$.

Theorem. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\mathrm{BF}(V)$ die Menge der Bilinearformen auf V. Dann ist $\mathrm{BF}(V)$ ein Vektorraum, wobei wir für $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{BF}(V)$ die Summe $\beta_1 + \beta_2 \in \mathrm{BF}(V)$ und für $\lambda \in \mathbb{K}$ das Vielfache $\lambda\beta \in \mathrm{BF}(V)$ wie folgt definieren:*

$$\begin{aligned}&\forall u, v \in V : (\beta_1 + \beta_2)(u, v) = \beta_1(u, v) + \beta_2(u, v),\\ &\forall u, v \in V : (\lambda\beta)(u, v) = \lambda\beta(u, v).\end{aligned}$$

Definition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$. Die* Darstellungsmatrix *von β bezüglich einer geordneten Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ist die Matrix $A = [\beta]_{\mathcal{B}} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gegeben durch*

$$A_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad (1 \le i, j \le n).$$

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n und sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V, dann ist die Abbildung $\psi_{\mathcal{B}} : \mathrm{BF}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\beta \mapsto [\beta]_{\mathcal{B}}$, ein Isomorphismus.*

Korollar. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n = \dim(V)$, dann ist $\dim\big(\mathrm{BF}(V)\big) = n^2$.*

Korollar. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n = \dim(V)$, und sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Seien $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Folgende sind äquivalent:*

i) $A = [\beta]_{\mathcal{B}}$.

ii) $\forall u, v \in V : \beta(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^T A[v]_{\mathcal{B}}$.

Korollar. *Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \mathrm{BF}(\mathbb{K}^n)$. Dann existiert eine eindeutige Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sodass*

$$\forall u, v \in \mathbb{K}^n : \beta(u, v) = u^T Av.$$

Insbesondere ist $A = [\beta]_{\mathcal{E}_n}$.

Definition. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A und B heissen* kongruent, *falls eine invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass*

$$B = Q^T AQ.$$

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit geordneten Basen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$, sei Q die Basiswechselmatrix von $\tilde{\mathcal{B}}$- zu $\mathcal{B}$-Koordinaten und sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$. Dann gilt*

$$[\beta]_{\tilde{\mathcal{B}}} = Q^T [\beta]_{\mathcal{B}} Q.$$

Insbesondere sind $[\beta]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ und $[\beta]_{\mathcal{B}}$ kongruent.

Korollar. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n = \dim(V)$, sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V, $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann existiert eine Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ von V, sodass $A = [\beta]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ ist.*

7.2 Symmetrische Bilinearformen

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ heisst symmetrisch, wenn $\beta(u, v) = \beta(v, u)$ für alle $u, v \in V$ gilt.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) β ist symmetrisch.

ii) Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V, dann ist $[\beta]_{\mathcal{B}}$ symmetrisch.

iii) Es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $[\beta]_{\mathcal{B}}$ symmetrisch ist.

Definition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ heisst diagonalisierbar, falls eine Basis $\mathcal{B}$ existiert, sodass $[\beta]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Korollar. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ diagonalisierbar, dann ist β symmetrisch.*

Lemma. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$. Falls $\beta \in \mathrm{BF}(V) \setminus \{0\}$ symmetrisch ist, dann existiert ein $v \in V$, sodass $\beta(v, v) \neq 0$ gilt.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$. Dann ist jede symmetrische Bilinearform auf V diagonalisierbar.*

Theorem (Hauptachsentheorem II). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper in welchem $2 \neq 0$ gilt. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ symmetrisch. Dann ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix.*

7.3 Quadratische Formen

Definition. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sodass $2 \neq 0$. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $Q : V \to \mathbb{K}$ is eine* quadratische Form *auf V, falls*

$$Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K},\, v \in V,$$

und falls die Abbildung $\beta_Q : V \times V \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$\beta_Q(u,v) = \frac{1}{2}\big(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\big) \quad (u, v \in V)$$

eine Bilinearform auf V ist.

Definition. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sodass $2 \neq 0$. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $Q : V \to \mathbb{K}$ ist eine quadratische Form, wenn eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und eine symmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existieren, sodass*

$$Q(v) = [v]_{\mathcal{B}}^T A [v]_{\mathcal{B}} \quad \text{für alle } v \in V.$$

Proposition. *Die beiden Definitionen quadratischer Formen sind zueinander äquivalent.*

Proposition. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper in welchem $2 \neq 0$ gilt. Sei $Q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ eine quadratische Form und sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis. Dann ist die symmetrische Matrix A, die Q definiert, eindeutig durch Q bestimmt.*

Theorem (Hauptachsentheorem - revisited)**.** *Sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$. So gilt:*

i) Es existiert eine ONB $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ von $\mathbb{R}^n$ für das standard innere Produkt, es gibt $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q} > 0$, sodass $p + q \leq n$ und

$$Q(v) = \lambda_1 a_1^2 + \cdots + \lambda_p a_p^2 - \lambda_{p+1} a_{p+1}^2 - \cdots - \lambda_{p+q} a_{p+q}^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelten, wobei $v = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$.

ii) Es existiert eine orthogonale Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ für das standard innere Produkt, es gibt $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sodass $p + q \leq n$ und

$$Q(v) = \tilde{a}_1^2 + \cdots + \tilde{a}_p^2 - \tilde{a}_{p+1}^2 - \cdots - \tilde{a}_{p+q}^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelten, wobei $v = \tilde{a}_1 v_1 + \cdots + \tilde{a}_n v_n$.

Falls $p + q = n$, dann heisst das Tupel (p, q) Typus *von Q.*

Definition. *Eine symmetrische Bilinearform β auf $\mathbb{R}^n$, die quadratische Form $Q(v) = \beta(v, v)$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die symmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $\beta(u, v) = u^T A v$ heissen*

- positiv semidefinit*, falls $Q(v) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist.*
- positiv definit*, falls Q positiv semidefinit ist und $Q(v) = 0 \iff v = 0$ gilt, d.h. β definiert ein inneres Produkt.*
- negativ semidefinit*, falls $Q(v) \leq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist.*

- negativ definit, *falls Q negativ semidefinit ist und $Q(v) = 0 \iff v = 0$ gilt, d.h. $-\beta$ definiert ein inneres Produkt.*

Bemerkung. *Sei Q eine quadratische Form von Typus (p, q) auf $\mathbb{R}^n$.*

- *Q ist positiv semidefinit $\iff q = 0$.*
- *Q ist positiv definit $\iff p = n$.*
- *Q ist negativ semidefinit $\iff p = 0$.*
- *Q ist negativ definit $\iff q = n$.*

Definition. *Eine (homogene) Quadrik in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge der Form*

$$X_{Q,a} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Q(v) = a\}$$

für eine quadratische Form Q auf $\mathbb{R}^n$ und ein $a \in \mathbb{R}$.

7.4 Sylvesters Trägheitssatz

Theorem. *Sei β eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen, endlichdimensionalen Vektorraum V, so ist die Anzahl der positiven und der negativen Einträge in irgendeiner Diagonalmatrixdarstellung invariant.*

Definition. *Sei β eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen, endlichdimensionalen Vektorraum V. Sei $n = \dim V$ und sei p die Anzahl der positiven und q die Anzahl der negativen Diagonaleinträge einer Diagonalmatrixdarstellung von β. Das Tupel*

$$\sigma(\beta) = (p, q, n - (p + q))$$

heisst Signatur von β.

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, und sei $\sigma(A)$ definiert als die Signatur der Bilinearform $(u, v) \mapsto u^T Av$. Dann ist die Signatur invariant unter Kongruenz.*

Korollar. *Zwei symmetrische, reelle Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sind genau dann kongruent, wenn $\sigma(A) = \sigma(B)$ gilt.*

7.5 Singulärwertzerlegung

Theorem (Singulärwertzerlegung/Cartan-Zerlegung)**.** *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale, euklidische Vektorräume, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$, sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $r = \mathrm{Rang}(T) \geq 1$. Dann existieren $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ und orthonormale Basen $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ von V und W, sodass*

$$Tv_i = \begin{cases} \sigma_i w_i & 1 \leq i \leq r \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Korollar. *Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $r = \mathrm{Rang}(A) \geq 1$ existieren Matrizen $Q \in O(n)$, $R \in O(m)$ sowie eine Matrix $D \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ der Form*

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, sodass $A = RDQ^T$ gilt. Die Einträge $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ in der Singulärwertzerlegung von A heissen Singulärwerte von A und sind gleich der positiven Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte von AA^T.

7.6 Klassifikation orthogonaler Endomorphismen

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$. T ist eine* Rotation*, falls entweder $T = \mathrm{id}_V$ oder falls ein 2-dimensionaler Unterraum $W \subseteq V$ mit einer ONB (v_1, v_2) von W sowie ein $\theta \in \mathbb{R}$ existieren, sodass*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \cos\theta v_1 + \sin\theta v_2 \\ T(v_2) &= -\sin\theta v_1 + \cos\theta v_2 \end{aligned}$$

und $T(v) = v$ für alle $v \in W^\perp$ gelten. T ist eine Rotation um $W^\perp$, bzw. $W^\perp$ ist die Rotationsachse *von T.*

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$. T ist eine* Reflexion*, falls ein 1-dimensionaler Unterraum $W \subseteq V$ existiert, sodass $T(w) = -w$ für alle $w \in W$ und $T(v) = v$ für alle $v \in W^\perp$ gelten. T ist eine Reflexion von V in W.*

Bemerkung. *Reflexionen und Rotationen sind orthogonal.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal. Dann ist T entweder eine Rotation oder eine Reflexion und es gilt insbesondere*

- *T ist eine Rotation $\iff \det(T) = 1$,*
- *T ist eine Reflexion $\iff \det(T) = -1$.*

Korollar. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Die Komposition einer Rotation und einer Reflexion ist eine Reflexion.*

Lemma. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim V \geq 1$, sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert ein T-invarianter Unterraum $W \subseteq V$ mit $1 \leq \dim W \leq 2$.*

Theorem. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal. Dann existieren paarweise orthogonale, T-invariante Unterräume $W_1, \ldots, W_m$ von V, sodass folgende gelten:*

i) $1 \leq \dim W_i \leq 2$ *für alle* $1 \leq i \leq m$.

ii) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$ und seien $W_1, \ldots, W_m$ paarweise orthogonale, T-invariante Unterräume von V der Dimensionen 1 oder 2. sodass $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.*

i) Die Anzahl der Unterräume W_i für welche $T|_{W_i}$ eine Rotation bzw. eine Reflexion ist, ist gerade oder ungerade abhängig davon, ob $\det T = 1$ oder $\det T = -1$.

ii) Es ist immer möglich V so zu zerlegen, dass die Anzahl der W_i für welche $T|_{W_i}$ eine Reflexion ist, gleich 1 oder 0 ist und zudem, falls T_{W_i} eine Reflexion ist, $\dim W_i = 1$ gilt.

Korollar. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, $T \in \operatorname{End}(V)$ orthogonal. Es existieren $T_1, \ldots, T_m \in \operatorname{End}(V)$ orthogonal, sodass gelten:*

i) Für alle $1 \leq i \leq m$ ist T_i ist entweder eine Reflexion oder eine Rotation.

ii) Es existiert maximal ein i, sodass T_i eine Reflexion ist.

iii) Für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt $T_iT_j = T_jT_i$.

iv) $T = T_1 \cdots T_m$.

v) Es ist

$$\det(T) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } T_i \textit{ eine Rotation ist für alle } 1 \leq i \leq m \\ -1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Korollar. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$ orthogonal. Dann existiert eine ONB $\mathcal{B}$ von V, sodass*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_m \end{pmatrix},$$

wobei $D_k = \pm 1 \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$ oder von der Form $D_k = \left(\begin{smallmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{smallmatrix}\right)$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $a_k^2 + b_k^2 = 1$ ist. Falls $\det T = 1$, dann kann man alle 1×1 Blockdiagonaleinträge gleich 1 wählen.

Korollar (Der Satz vom Fussball)**.** *Bei jedem Fussballspiel, in dem nur ein Ball benutzt wird, gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balles, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf dem Anstosspunkt liegt) an der gleichen Stelle im umliegenden Raum befinden.*

Korollar. *Die Gruppe der speziellen orthoogonalen Matrizen*

$$\mathrm{SO}(n) = \{Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid QQ^T = Q^TQ = I_n \wedge \det(Q) = 1\}$$

wird von Rotationen erzeugt.

8 Die Jordan Normalform

8.1 Die Jordan Normalform für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Definition. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Der* Jordanblock *der Grösse k zum Eigenwert λ ist die $k \times k$-Matrix*

$$J_{k,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_{k \times k}(\mathbb{K})$$

Definition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Die Darstellungsmatrix $[T]_\mathcal{B}$ ist in Jordan Normalform, falls*

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix},$$

wobei jedes A_i ein Jordanblock ist. Man nennt $\mathcal{B}$ eine Jordanbasis.

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ist ein* verallgemeinerter Eigenvektor/Hauptvektor *von T bezüglich λ, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $(T - \lambda \mathrm{id}_V)^k(v) = 0$.*

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T. Der* verallgemeinerte Eigenraum/Hauptraum *von T bezüglich λ ist*

$$K_\lambda = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda \mathrm{id}_V)^k(v) = 0\}.$$

Theorem. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T. Dann gelten*

i) $K_\lambda \subseteq V$ *ist ein T-invarianter Unterraum und $E_\lambda \subseteq K_\lambda$.*

ii) Für alle $\mu \neq \lambda$ ist $(T - \mu \mathrm{id}_V)|_{K_\lambda}$ injektiv.

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{char}_T(X)$ zerfalle in Linearfaktoren. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T mit algebraischer Multiplizität m. Dann gelten*

i) $\dim K_\lambda \leq m$.

ii) $K_\lambda = \mathrm{Ker}((T - \lambda \mathrm{id}_V)^m)$.

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{char}_T(X)$ zerfalle in Linearfaktoren. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T. Dann existieren für alle $v \in V$ Vektoren $v_i \in K_{\lambda_i}$, sodass $v = v_1 + \cdots + v_k$.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{char}_T(X)$ zerfalle in Linearfaktoren. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T mit algebraischen Multiplizitäten $m_1, \ldots, m_k$. Seien $\mathcal{B}_i$ Basen von K_{λ_i}, so gelten* *i)* $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \{\}$ *wenn* $i \neq j$,

ii) $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ *ist eine Basis von* V,

iii) $\dim K_{\lambda_i} = m_i$ *für alle* $1 \leq i \leq k$.

Korollar. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *und* $\mathrm{char}_T(X)$ *zerfalle in Linearfaktoren. Dann ist* T *genau dann diagonalisierbar, wenn* $E_\lambda = K_\lambda$ *für alle* $\lambda \in \sigma(T)$ *ist.*

8.2 Existenz einer Jordan Normalform

Definition. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *und sei* $v \in V \setminus \{0\}$ *ein Hauptvektor zum Eigenwert* λ*. Sei* $p \in \mathbb{N}$ *minimal mit der Eigenschaft* $(T - \lambda \mathrm{id}_V)^p(v) = 0$*. Die geordnete Menge*

$$((T - \lambda \mathrm{id}_V)^{p-1}(v), \ldots, (T - \lambda \mathrm{id}_V)(v), v)$$

heisst Zyklus *des Hauptvektors* v *von* T *zum Eigenwert* λ*. Dieser Zyklus hat* Länge p*. Die Vektoren* v *und* $(T - \lambda \mathrm{id}_V)^{p-1}(v)$ *sind die* Start- *bzw.* Endvektoren *des Zyklus.*

Theorem. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *und* $\mathrm{char}_T(X)$ *zerfalle in Linearfaktoren. Sei* $\mathcal{B}$ *eine geordnete Basis von* V*, die eine disjunkte Vereiningung von Zyklen von Hauptvektoren von* T *ist. So gelten*

i) Sei $\gamma \subseteq \mathcal{B}$ *ein Zyklus eines Hauptvektors von* T *und sei* $W = \mathrm{span}(\gamma)$*. Dann ist* W *invariant unter* T *und* $[T|_W]_\gamma$ *ist ein Jordanblock.*

ii) $\mathcal{B}$ *ist eine Jordanbasis von* V.

Theorem. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *und sei* $\lambda \in \sigma(T)$*. Seien* $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ *Zyklen zu Hauptvektoren von* T *zum Eigenwert* λ *mit linear unabhängigen Endvektoren. Dann gilt* $\gamma_i \cap \gamma_j = \{\}$ *für* $i \neq j$ *und die Menge* $\gamma = \bigcup_{i=1}^q \gamma_i$ *ist linear unabhängig.*

Korollar. *Jeder Zyklus zu einem Hauptvektor ist eine linear unabhängige Menge.*

Theorem. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *und sei* $\lambda \in \sigma(T)$*. Dann besitzt* K_λ *eine Basis bestehend aus disjunkten Zyklen zu Hauptvektoren von* T *zum Eigenwert* λ*.*

Korollar. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *und* $\mathrm{char}_T(X)$ *zerfalle in Linearfaktoren. Dann besitzt* T *eine Darstellungsmatrix in Jordan Normalform.*

Definition. *Sei* $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ *und* $\mathrm{char}_A(X)$ *zerfalle in Linearfaktoren. Die* Jordan Normalform *von* A *ist die Jordan Normalform von* $L_A \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$*.*

Korollar. *Sei* $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ *und* $\mathrm{char}_A(X)$ *zerfalle in Linearfaktoren. Dann hat* A *eine Jordan Normalform* J *und* A *ist ähnlich zu* J*.*

8.3 Anwendungen der Jordan Normalform

Lemma. *$J_{k,\lambda}$ ist ähnlich zu $J_{k,\lambda}^T$.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann ist A ähnlich zu A^T.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. So ist $\exp(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ wohldefiniert. Es gilt $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$ und somit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Proposition. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $\operatorname{char}_A(X)$ zerfalle in Linearfaktoren. Dann gilt*

$$\det(A) = \prod_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda^{m_\lambda(A)},$$

wobei $m_\lambda(A)$ die algebraische Multiplizität von λ ist.

9 Unitäre Vektorräume

9.1 Sesquilinearformen

Definition. *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine* Sesquilinearform *auf V ist eine Abbildung*

$$\gamma : V \times V \to \mathbb{C},\ (u, v) \mapsto \gamma(u, v),$$

sodass für alle $u, \tilde{u}, v, \tilde{v} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ folgende gelten:

- $\gamma(u, v + \tilde{v}) = \gamma(u, v) + \gamma(u, \tilde{v})$,
- $\gamma(u + \tilde{u}, v) = \gamma(u, v) + \gamma(\tilde{u}, v)$,
- $\gamma(u, \lambda v) = \lambda\gamma(u, v)$,
- $\gamma(\lambda u, v) = \overline{\lambda}\gamma(u, v)$.

Die Sesquilinearform γ heisst hermitesch*, falls $\gamma(v, u) = \overline{\gamma(u, v)}$ für alle $u, v \in V$.*

Definition.
- *Die* komplex konjugierte *einer Matrix $A = (A_{ij})_{1\le i\le m}^{1\le j\le n}$ in $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ ist die Matrix $\overline{A} = (\overline{A_{ij}})_{1\le i\le m}^{1\le j\le n} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.*
- *Die* Adjungierte *einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ ist die Matrix $A^* = \overline{A}^T$.*
- *Eine komplexe Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ heisst* selbstadjungiert/hermitesch*, falls $A = A^*$ gilt.*

Definition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und sei γ eine Sesquilinearform auf V. Die* Darstellungsmatrix *von γ bezüglich $\mathcal{B}$ ist die Matrix $[\gamma]_\mathcal{B} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gegeben durch*

$$\left([\gamma]_\mathcal{B}\right)_{ij} = \gamma(v_i, v_j) \quad (1 \le i, j \le n),$$

und wir bezeichen durch $\psi_\mathcal{B} : \operatorname{Ses}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ die Abbildung, die einer Sesquilinearform γ die Darstellungsmatrix $[\gamma]_\mathcal{B}$ von γ bezüglich $\mathcal{B}$ zuweist.

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\dim V = n$, seien $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ Basen von V, und sei $\mathrm{Ses}(V)$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Sesquilinearformen auf V.*

i) Die Abbildung $\psi_{\mathcal{B}} : \mathrm{Ses}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist ein Isomorphismus.

ii) $\gamma \in \mathrm{Ses}(V)$ ist genau dann hermitesch, wenn $[\gamma]_{\mathcal{B}}$ hermitesch ist.

iii) Es ist $[\gamma]_{\tilde{\mathcal{B}}} = ([\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}})^*[\gamma]_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$ für alle $\gamma \in \mathrm{Ses}(V)$.

9.2 Komplexe Skalarprodukte

Proposition. *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei γ eine hermitesche Form auf V. Dann ist $\gamma(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.*

Definition. *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Form.*

- *Die Form heisst* positiv definit, *falls $\langle v, v\rangle > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.*
- *Der* Betrag *eines Vektors $v \in V$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*
- *Eine positiv definite hermitesche Form ist ein* Skalarprodukt/inneres Produkt *auf V. Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt ist ein* unitärer *Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

Definition. *Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist für $z = (z_i)_i, w = (w_i)_i \in \mathbb{C}^n$ gegeben durch*

$$\langle z, w\rangle = z^*w = \overline{z_1}w_1 + \cdots + \overline{z_n}w_n$$

und somit

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}.$$

Definition. *Eine hermitesche Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ heisst* positiv definit, *falls für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gilt $v^*Av > 0$.*

Proposition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Eine hermitesche Form γ auf V ist genau dann positiv definit, wenn $[\gamma]_{\mathcal{B}}$ positiv definit ist.*

Proposition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Dann gilt die* Cauchy-Schwarz Ungleichung*: Für alle $v, w \in V$ ist $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.*

Lemma. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Dann ist die Abbildung $v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ eine Norm.*

Proposition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Dann gilt die* Dreiecksungleichung*: Für alle $v, w \in V$ ist $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.*

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum.*

- *Seien $v, w \in V$, dann ist $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ genau dann, wenn $v = \lambda w$ für ein $\lambda \in [0, \infty)$.*

- *Der* Winkel α *zwischen zwei Vektoren* $v, w \in V \setminus \{0\}$ *ist definiert durch*

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

- *Zwei Vektoren* $v, w \in V$ *sind* orthogonal*, geschrieben* $v \perp w$*, genau dann, wenn* $\langle v, w\rangle = 0$.

- *Ein Vektor* $v \in V$ *heisst* normiert*, falls* $\|v\| = 1$*. Wenn* $v \neq 0$*, dann ist* $\frac{v}{\|v\|}$ *normiert.*

9.3 Orthonormalbasen

Definition. *Eine Teilmenge* $S \subseteq V$ *ist eine Orthonormalbasis (ONB), falls die Elemente von* S *paarweise zueinander orthogonal sind, falls jedes Element von* S *normiert ist, und falls* S *eine Basis von* V *ist.*

Proposition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein unitärer Vektorraum mit einer ONB* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$*, dann ist*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v\rangle v_i \quad (v \in V).$$

Proposition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein unitärer Vektorraum mit einer geordneten Basis* $\mathcal{B}$*.* $\mathcal{B}$ *ist genau dann eine orthogonale/orthonormale Basis von* V*, wenn die Darstellungsmatrix des Skalarprodukts bezüglich* $\mathcal{B}$ *eine Diagonal-/die Identitätsmatrix ist.*

Theorem (Gram-Schmidt Orthogonalisierung)**.** *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein unitärer Vektorraum und sei* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine geordnete Basis von* V*. Dann existiert genau eine ONB* $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ *von* V*, sodass für alle* $1 \leq j \leq n$ *gilt*

$$v_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}\tilde{v}_i \quad (a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{jj} \in \mathbb{R}^+).$$

Es gilt $\tilde{v}_i = \frac{\hat{v}_i}{\|\hat{v}_i\|}$*, wobei* $\hat{v}_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \hat{v}_j, v_i\rangle}{\|\hat{v}_j\|^2}\hat{v}_j$*. Insbesondere besitzt jeder endlichdimensionale unitäre Vektorraum eine ONB.*

Definition. *Seien* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$*,* $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *unitäre Vektorräume, sei* $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$*.* T *heisst* unitär *(oder auch/insbesondere* Isometrie*), falls für alle* $v, \tilde{v} \in V$ *gilt*

$$\langle T(v), T(\tilde{v})\rangle_W = \langle v, \tilde{v}\rangle_V.$$

Proposition. *Seien* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$*,* $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *unitäre Vektorräume gleicher endlicher Dimension. Dann existiert eine unitäre Abbildung* $T : V \to W$*.*

Proposition. *Die Komposition zweier unitärer Abbildungen ist unitär.*

Proposition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein unitärer Vektorraum. Dann ist* id_V *unitär.*

Definition. *Sei* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*.* A *ist* unitär*, falls die Abbildung* $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *unitär ist bezüglich dem Standardskalarprodukt.*

Proposition. *Sei* $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*. Folgende sind äquivalent.*

i) Q *ist unitär.*

ii) $(Q^{(1)}, \dots, Q^{(n)})$ *ist eine ONB von* $\mathbb{C}^n$ *bezüglich dem Standardskalarprodukt.*

iii) $Q^*Q = I_n$.

iv) $QQ^* = I_n$.

Definition. *Die* unitäre Gruppe *von Grad n ist die Menge*

$$U(n) = \{Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid Q^*Q = QQ^* = I_n\}$$

versehen mit der Matrixmultiplikation.

Proposition (QR-Zerlegung)**.** *Sei* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. *Dann existieren* $Q \in U(n)$ *und eine obere Dreiecksmatrix* $R \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, *sodass* $A = QR$.

Definition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein unitärer Vektorraum und sei* $S \subseteq V$. *Das* orthogonale Komplement *von* S *ist die Menge*

$$S^\perp = \{v \in V \mid \forall s \in S : \langle v, s\rangle = 0\}.$$

Wir schreiben $v \perp S$, *falls* $v \in S^\perp$.

Proposition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein unitärer Vektorraum. Seien* $S, \tilde{S} \subseteq V$ *und sei* $U \subseteq V$ *ein Unterraum.*

- $S^\perp \subseteq V$ *ist ein Unterraum.*
- $S \subseteq (S^\perp)^\perp$.
- $S \subseteq \tilde{S} \implies S^\perp \supset \tilde{S}^\perp$.
- $U \cap U^\perp = \{0\}$.
- $\dim V < \infty \implies V = U \oplus U^\perp$.

Definition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei* $U \subseteq V$ *ein Unterraum. Die* orthogonale Projektion *von* V *auf* U *ist die lineare Abbildung*

$$\pi_U : V = U \oplus U^\perp \to U,\ u + u' \mapsto u.$$

Proposition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei* $U \subseteq V$ *ein Unterraum und sei* $\pi_U : V \to U$ *die orthogonale Projektion von* V *auf* U. *Sei* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ *eine ONB von* U, *dann gilt*

$$\pi_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v\rangle v_i \quad (v \in V).$$

9.4 Adjungierte und selbstadjungierte Abbildungen

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Dann ist die Abbildung $\Phi : V \to V^*$, $v \mapsto \Phi_v = \langle v, \cdot\rangle$ ein semi-linearer/konjugiert linearer Isomorphismus.*

Proposition. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale unitäre Vektorräume. Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $T^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$, sodass*

$$\forall v \in V \forall w \in W : \langle w, T(v)\rangle_W = \langle T^*(w), v\rangle_V.$$

Definition. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ unitäre Vektorräume. Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Falls ein Homomorphismus $T^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$ existiert, sodass*

$$\forall v \in V \forall w \in W : \langle w, T(v)\rangle_W = \langle T^*(w), v\rangle_V,$$

dann nennt man T^* die Adjungierte *von T. Eine solche Adjungierte ist eindeutig, wann immer sie existiert. Wenn $T = T^*$ ist, dann heisst T* selbstadjungiert.

Proposition. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ unitäre Vektorräume. Seien $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$.*

- *Wenn T^* existiert, dann existiert auch $(T^*)^*$ und es gilt $(T^*)^* = T$.*
- *Falls T^* existiert und $\dim V < \infty$, dann gilt für jede ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, dass*
$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_i), w\rangle_W v_i \quad (w \in W).$$
- *Seien V, W endlichdimensional und seien $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ ONB von V, W. Dann ist*
$$[T^*]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = ([T]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}})^*.$$
- *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, dann ist $(L_A)^* = L_{A^*}$.*

Proposition. *Seien T_1, T_2 lineare Abbildungen zwischen unitären Vektorräumen, sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wann immer wohldefiniert, gelten*

i) $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.

ii) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

iii) $(\lambda T_1)^* = \overline{\lambda} T_1^*$.

9.5 Normale (und selbstadjungierte) Endomorphismen

Lemma. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Wenn T einen Eigenvektor besitzt, so besitzt auch T^* einen Eigenvektor.*

Theorem (Schur)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Wenn $\mathrm{char}_T(X)$ in Linearfaktoren zerfällt, dann existiert eine ONB $\mathcal{B}$ von V, sodass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Definition. *Seien* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Sei* $T \in \operatorname{End}(V)$. T *heisst* normal, *falls* $TT^* = T^*T$ *gilt. Eine Matrix* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *heisst* normal, *falls* $A^*A = AA^*$.

Proposition. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei* $T \in \operatorname{End}(V)$.

i) Falls T *selbstadjungiert ist, ist* T *normal.*

ii) Falls T *unitär ist, ist* T *normal.*

iii) Falls T *normal ist, ist* T^* *normal.*

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei* $T \in \operatorname{End}(V)$ *normal.*

i) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ *für alle* $v \in V$.

ii) $T - c\mathrm{id}_V$ *ist normal für alle* $c \in \mathrm{id}_V$.

iii) $T(v) = \lambda v \implies T^*(v) = \overline{\lambda}v$.

iv) Seien λ_1, λ_2 *verschiedene Eigenwerte von* T *mit Eigenvektoren* v_1, v_2. *Dann gilt* $v_1 \perp v_2$.

Theorem (Spektralsatz für normale Endomorphismen)**.** *Seien* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und sei* $T \in \operatorname{End}(V)$. T *ist genau dann normal, wenn eine ONB* $\mathcal{B}$ *von* V *bestehend aus Eigenvektoren von* T *existiert.*

Theorem (Spektralsatz für unitäre Vektorräume)**.** *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein unitärer Vektorraum und sei* T *selbstadjungiert.*

i) Alle Eigenwerte von T *sind reell.*

ii) Falls $\dim V < \infty$, *dann existiert eine ONB von* V *bestehend aus Eigenvektoren von* T. *Insbesondere ist* T *diagonalisierbar.*

Theorem (Hauptachsentransformation)**.** *Sei* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *hermitesch. Dann existiert eine unitäre Matrix* $Q \in U(n)$, *sodass* Q^*AQ *eine Diagonalmatrix ist.*

9.6 Klassifikation unitärer Endomorphismen

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei* $T \in \operatorname{End}(V)$ *unitär, so gelten:*

i) Alle Eigenwerte von T *haben Betrag* 1.

ii) T *ist diagonalisierbar.*

Korollar. $U(n) \subseteq \mathbb{C}^2$ *ist zusammenhängend.*