Theorem. *In jeder Gruppe* $(G, \circ, e)$ *gilt:*

i) *Jedes linksneutrale Element ist rechtsneutral, d.h.* $\forall a \in G : a \circ e = a$.

ii) *Jedes zu* $a \in G$ *linksinverse Element* $a' \in G$ *ist rechtsinvers, d.h.* $a \circ a' = e$.

iii) *Das neutrale Element ist eindeutig.*

iv) *Zu jedem* $a \in G$ *ist das inverse Element* $a^{-1} \in G$ *eindeutig.*

v) $\forall a \in G : (a^{-1})^{-1} = a$.

vi) $\forall a, b \in G : (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

vii) $\forall a, b \in G \exists! x \in G : a \circ x = b$.

viii) $\forall a, b \in G \exists! y \in G : y \circ a = b$.

ix) $\forall a, b, c \in G : b = c \iff a \circ b = a \circ c$.

x) $\forall a, b, c \in G : b = c \iff b \circ a = c \circ a$.

Definition. *Ein* Körper *ist ein Tupel* $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ *bestehend aus einer Menge* $\mathbb{K}$ *mit zwei Abbildungen*

$$
\begin{aligned}
+ :& \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; (x, y) \mapsto x + y \\
\cdot :& \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; (x, y) \mapsto x \cdot y
\end{aligned}
$$

und ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in \mathbb{K}$*, sodass die folgenden Körperaxiome gelten:*

(K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x + (y + z) = (x + y) + z$ *(Assoziativität der Addition)*

(K2) $\forall x, y \in \mathbb{K} : x + y = y + x$ *(Kommutativität der Addition)*

(K3) $\forall x \in \mathbb{K} : 0 + x = x$ *(Neutrales Element der Addition)*

(K4) $\forall x \in \mathbb{K} \exists x' \in \mathbb{K} : x + x' = 0$ *(Inverses Element der Addition)*

(K5) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(Assoziativität der Multiplikation)*

(K6) $\forall x \in \mathbb{K} : 1 \cdot x = x$ *(Neutrales Element der Multiplikation)*

(K7) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists x' \in \mathbb{K} : x \cdot x' = 1$ *(Inverses Element der Multiplikation)*

(K8) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : \begin{aligned} x \cdot (y + z) =& (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ (x + y) \cdot z =& (x \cdot z) + (y \cdot z) \end{aligned}$ *(Distributivität)*

(K9) $1 \neq 0$ *(Nichttrivialität)*

(K10) $\forall x, y \in \mathbb{K} : x \cdot y = y \cdot x$ *(Kommutativität der Multiplikation)*

Definition. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper. Eine Menge* V *zusammen mit einer inneren Verknüpfung (Addition genannt)*

$$+ : V \times V \to V; (u, v) \mapsto u + v$$

und einer äusseren Verknüpfung (Multiplikation genannt)

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V; (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

heisst ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ *wenn folgende Vektorraumaxiome gelten:*

(V1) $\forall u, v \in V : u + v = v + u$

(V2) $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$

(V3) $\exists\, 0_V \in V\, \forall u \in V : 0_V + u = u$

(V4) $\forall u \in V\, \exists\, v \in V : u + v = 0_V$

(V5) $\forall u \in V : 1 \cdot u = u$

(V6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \forall u \in V : (\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

(V7) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall u, v \in V : \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

(V8) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \forall u \in V : (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Definition. *Ein Vektorraum V ist die* direkte Summe *von W_1 und W_2, bezeichnet mit $V = W_1 \oplus W_2$, wenn $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume sind, sodass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $W_1 + W_2 = V$.*

Theorem. *Für jede Teilmenge $S \subseteq V$ sind folgende äquivalent:*

i) S ist linear unabhängig.

ii) Kein Element in S ist eine Linearkombination der übrigen Elemente von S.

iii) Jeder Vektor in V besitzt höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S.

Theorem. *Sei $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V und sei $v \in V \setminus S$. So gilt $S \cup \{v\}$ ist linear abhängig $\iff v \in \operatorname{span}(S)$.*

Theorem. *Sei V ein Vektorraum mit einer endlichen Basis $\mathcal{B}$ mit n Elementen. Sei $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ linear unabhängig mit $m \leq n$. Dann existiert $S_0 \subseteq \mathcal{B}$ mit $n - m$ Elementen, sodass $\operatorname{span}(S \cup S_0) = V$.*

Lemma. *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V über $\mathbb{K}$, ein Unterraum $W \subseteq V$ sowie $v, v_1, v_2 \in V$.*

i) $v + W$ ist ein Unterraum $\iff v \in W$.

ii) $v_1 + W = v_2 + W \iff v_1 - v_2 \in W$.

Lemma. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, W ein Unterraum, V/W die Menge aller Nebenklassen von W und seien $+ : V/W \times V/W \to V/W$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V/W \to V/W$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} +(v_1 + W, v_2 + W) &:= (v_1 + v_2) + W \\ \cdot(\lambda, v + W) &:= (\lambda v) + W \end{aligned}$$

Dann sind $+, \cdot$ wohldefiniert und V/W mit den Verknüpfungen $+, \cdot$ ist ein Vektorraum.

Lemma. *Sei V ein Vektorraum, W ein Unterraum. Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von W und seien $\{v_{m+1}, \dots, v_n\} \subseteq V$, sodass $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist. Dann ist $\{v_{m+1} + W, \dots, v_n + W\}$ eine Basis von V/W.*

Korollar. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, W ein Unterraum. Dann gilt*

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

Theorem. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, dann ist*

$$\mathrm{Im(T)} = \operatorname{span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$$

Theorem. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei V endlichdimensional. Dann gilt*

$$\operatorname{nullity}(T) + \operatorname{Rang}(T) = \dim V$$

Theorem. *Sei $T : V \to W$ linear und seien V, W endlichdimensional mit $\dim V = \dim W$. Dann ist T injektiv genau dann, wenn T surjektiv ist.*

Definition. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, $T : V \to W$ linear, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ geordnete Basen. Die* Darstellungsmatrix *von T bezüglich $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ist das eindeutige $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ mit*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

Wir schreiben $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$. Wenn $V = W$ und $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, dann schreiben wir $[T]_{\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Definition. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$ so ist $BA \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$ definiert durch*

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik} A_{kj} \quad \forall 1 \leq i \leq p \forall 1 \leq j \leq n$$

Theorem. *Seien $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$, $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von U, V, W. Dann gilt*

$$[ST]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Theorem. *Seien $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von V, W. Dann gilt für alle $v \in V$*

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [v]_{\mathcal{B}}$$

Theorem. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ so ist $L_A \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Seien $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m$ die Standardbasen von $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$, dann gelten*

i) $[L_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} = A$

ii) $\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}):\ L_A = L_B \iff A = B$

iii) $\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \forall \lambda \in \mathbb{K}:\ L_{A+B} = L_A + L_B,\ L_{\lambda A} = \lambda L_A$

iv) $\forall T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \exists! C \in M_{m\times n}$*, sodass* $T = L_C$*. Es gilt* $C = [T]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}$*.*

v) $\forall E \in M_{n\times p}(\mathbb{K}):\ L_{AE} = L_A \circ L_E$

vi) Falls $m = n$*, dann ist* $L_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$

Theorem. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Sei $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann ist T genau dann invertierbar, wenn $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ invertierbar ist. Des Weiteren gilt $[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.*

Korollar. $\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = \dim(V)\dim(W)$

Theorem. *Seien V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ geordnete Basen von V, sowie $Q := [\mathrm{id}_V]_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}$. Sei $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$, dann gilt $[T]_{\tilde{\mathcal{B}}} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{B}} Q$.*

Definition. *Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann sind A, B* ähnlich*, wenn ein invertierbares $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = Q^{-1}AQ$.*

Theorem. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit geordneter Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und sei $\mathcal{B}^* := (f_1, \dots, f_n) \in (V^*)^n$, wobei $\{f_i \mid 1 \le i \le n\}$ die Koordinatenfunktionen bezüglich $\mathcal{B}$ sind. Dann ist $\mathcal{B}^*$ eine geordnete Basis von V^* und für alle $f \in V^*$ gilt*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i$$

Die Basis $\mathcal{B}^*$ ist die duale Basis *zu $\mathcal{B}$.*

Theorem. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ geordnete Basen von V und W. Sei $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, und $T^* : W^* \to V^*$ definiert durch $T^*(g) := g \circ T$ für alle $g \in W^*$. Dann gilt*

i) $T^* \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$

ii) $[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^T$

Theorem. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $P \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und seien P und Q invertierbar. Dann ist* $\operatorname{Rang}(PAQ) = \operatorname{Rang}(A)$.

Proposition. *Seien V, W, Z Vektorräume über $\mathbb{K}$ und seien $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $S \in \operatorname{Hom}(W, Z)$. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Dann gelten*

i) $\operatorname{Rang}(ST) \le \operatorname{Rang}(S)$

ii) $\operatorname{Rang}(ST) \le \operatorname{Rang}(T)$

iii) $\operatorname{Rang}(AB) \le \operatorname{Rang}(A)$

iv) $\operatorname{Rang}(AB) \le \operatorname{Rang}(B)$

Theorem. *Sei $AX = 0$ ein homogenes System über $\mathbb{K}$ mit m Gleichungen in n Unbekannten. Sei $\mathscr{L}$ die Lösungsmenge des Systems. Dann gilt $\mathscr{L} = \operatorname{Ker}(L_A)$ und somit ist $\mathscr{L}$ ein Unterraum und $\dim \mathscr{L} = n - \operatorname{Rang}(A)$.*

Theorem. *Sei $AX = b$ ein System von n Gleichungen in n Unbekannten, und sei A invertierbar. Dann hat das System genau eine Lösung $A^{-1}b$. Umgekehrt gilt, falls das System genau eine Lösung hat, dann ist A invertierbar.*

Theorem. *Das System $AX = b$ hat mindestens eine Lösung genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A \mid b)$.*

Algorithmus. *Um ein LGS von der Form $AX = b$ in n Unbekannten zu lösen, kann man wie folgt vorgehen:*

(1) Bilde die erweiterte Matrix $(A \mid b)$

(2) Führe $(A \mid b)$ mittels Gauss-Elimination in eine Matrix $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ in Zeilenstufenform über.

(3) Existiert eine Zeile mit dem einzigen von null verschiedenen Eintrag in der letzten Spalte, dann besitzt das LGS keine Lösung und der Algorithmus gibt die leere Menge zurück.

(4) *Partitioniere die Variablen $x_1, \dots, x_n$ in zwei Gruppen – die $m' := \mathrm{Rang}(A)$ Pivotvariablen und die $n-m'$ nicht-Pivotvariablen – und ersetze die nicht-Pivotvariablen durch neue Variablen $t_1, \dots, t_{n-m'}$.*

(5) *Lese die allgemeine Lösung v ab:*
$$v = v_0 + t_1 u_1 + \cdots + t_{n-m'} u_{n-m'}$$

Theorem. *Für jedes $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existieren eine Permutationsmatrix P, eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L sowie eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R, sodass $A = PLR$.*

Theorem. *Sei $\delta : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

i) *$\delta(A)$ ist linear in den Zeilen von $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$.*

ii) *Für jede Zeile $A_{(1)} \in \mathbb{K}^2$ gilt $\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(1)} \end{pmatrix} = 0$.*

iii) *$\delta(I_2) = 1$*

Dann ist $\delta = \det$.

Proposition. *Sei $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine alternierende multilineare Abbildung. Sei $1 \le j \le n+1$ und definiere*
$$\forall A \in M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K}) : \varepsilon_j(A) := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} A_{ij} \delta(\tilde{A}_{ij})$$
wobei $\tilde{A}_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die aus A nach Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhaltene Matrix ist. Dann ist $\varepsilon_j : M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinear und alternierend. Falls δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist, so ist ε_j eine Determinante auf $M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K})$.

Theorem. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.*

i) *Ist B entstanden aus A durch Multiplikation einer Zeile mit $c \in \mathbb{K}$. Dann ist $\delta(B) = c\delta(A)$.*

ii) *Sind zwei Zeilen von A identisch, dann ist $\delta(A) = 0$.*

iii) *Ist B entstanden aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, dann ist $\delta(B) = -\delta(A)$.*

iv) *Sind die Einträge einer Zeile von A alle gleich null, dann ist $\delta(A) = 0$.*

v) *Ist B entstanden durch Addition eines Vielfachen der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile von A, wobei $1 \le i, j \le n$ mit $i \ne j$. Dann ist $\delta(B) = \delta(A)$.*

Korollar. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann sind folgende äquivalent:*

i) *$\delta(A) = 0$*

ii) *A ist nicht invertierbar*

iii) $\mathrm{Rang}(A) < n$

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann gilt*
$$\forall 1 \le j \le n : \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$$

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, seien $1 \le i^*, j^* \le n$, dann ist*
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j^*} A_{ij^*} \det(\tilde{A}_{ij^*}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i^*+j} A_{i^*j} \det(\tilde{A}_{i^*j})$$

Theorem. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $T, \tilde{T} \in \mathrm{End}(V)$ beliebig. Es gelten:*

i) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$

ii) $\det(T \circ \tilde{T}) = \det(T)\det(\tilde{T})$

iii) *T ist genau dann ein Automorphismus, wenn $\det(T) \ne 0$ und in diesem Fall ist $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$.*

iv) *Sei $S : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist $\det(S \circ T \circ S^{-1}) = \det(T)$.*