Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 1

Aufgabe 1.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

(1.1a) Berechnen Sie die folgenden Terme:

i) $(-14+7\mathrm{i})+(8-\mathrm{i})$,

ii) $(4+8\mathrm{i})-(14+7\mathrm{i})$,

iii) $(-2+\mathrm{i})\times(-9+15\mathrm{i})$,

iv) $(12+3\mathrm{i})\div(12+6\mathrm{i})$.

(1.1b) Berechnen Sie die folgenden Terme durch Ausnutzung der Polarform:

i) $(-\mathrm{i})\div(1-\mathrm{i})$,

ii) $(-2-2\mathrm{i})\times(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$,

iii) $((1+\sqrt{3}\mathrm{i})\div(\sqrt{3}+\mathrm{i}))^{18}$.

HINWEIS: Sie dürfen die Lösung in Polarform angeben.

(1.1c) Skizzieren Sie Ihre Antworten aus den Teilaufgaben (1.1a) und (1.1b), sofern deren Betrag kleiner als 10 ist.

HINWEIS: Sie können die Skizze von Hand anfertigen oder aber Ihren Compurter zur Hilfe nehmen.

Aufgabe 1.2 Nullstellen Zeichnen

Zeichnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome in der komplexen Zahlenebene:

i) z^2+25,

ii) z^2-2z+2,

iii) z^3+z^2-2,

iv) z^7-1.

HINWEIS: Sie können die Skizzen von Hand anfertigen oder aber Ihren Compurter zur Hilfe nehmen.

Aufgabe 1.3 Funktionen mit komplexem Definitionsbereich

(1.3a) Berechnen Sie die folgenden Terme in der algebraischen Form.

i) e^{i},

ii) $\mathrm{e}^{1-2\mathrm{i}}$,

iii) $\log(1+\mathrm{i})$,

iv) $\log(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

(1.3b) Berechnen Sie die folgenden Terme approximativ:

i) $\cos(10\mathrm{i})$,

ii) $\cos(-10\mathrm{i})$,

iii) $\sin(5+5\mathrm{i})$,

iv) $\sin(2-\mathrm{i})$.

Aufgabe 1.4 Eine Komplexe Potenz

Berechnen Sie

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 1.5 Komplexe Grenzwerte und Reihen

(1.5a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim_{|n|\to\infty} \cos(\mathrm{i}n)$,

ii) $\lim_{n\to\infty} 1+(-1)^n \frac{\mathrm{i}}{n}$,

iii) $\lim_{n\to\infty} (n+2\pi\mathrm{i})^n/n^n$,

iv) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}(1+(-1)^n \frac{\mathrm{i}}{n})$,

wobei in der letzten Teilaufgabe der Hauptwert des Arguments gemeint ist.

(1.5b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{(\pi\mathrm{i})^n}{n!}.$$

Aufgabe 1.6 Herleitung der Additionstheoreme

(1.6a) Zeigen Sie, dass

$$\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$$

gilt, für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(1.6b) Beweisen Sie die Additionstheoreme des Sinus und Kosinus. Zeigen Sie also, dass

$$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x \sin y,$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

Publiziert am 21. Februar.

Einzureichen am 28. Februar.