Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 10

Aufgabe 10.1 Einige Fourierintegrale

(10.1a) Berechnen Sie die Fouriertransformation in den folgenden zwei Fällen:

i. Sei $a > 0$ und
$$f(t) := \begin{cases} a - |t| & \text{für } |t| \leq a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii. Sei $a > 0$ und
$$f(t) := \mathrm{e}^{-a|t|}.$$

(10.1b) Berechnen Sie die Fouriertransformation von
$$f(t) := \mathrm{e}^{-\pi t^2}.$$

Benutzen Sie dazu den Satz von Cauchy und den Weg γ aus der Abbildung 10.1.

Hinweis: Sie müssen im Exponenten des Integranden quadratisch ergänzen.

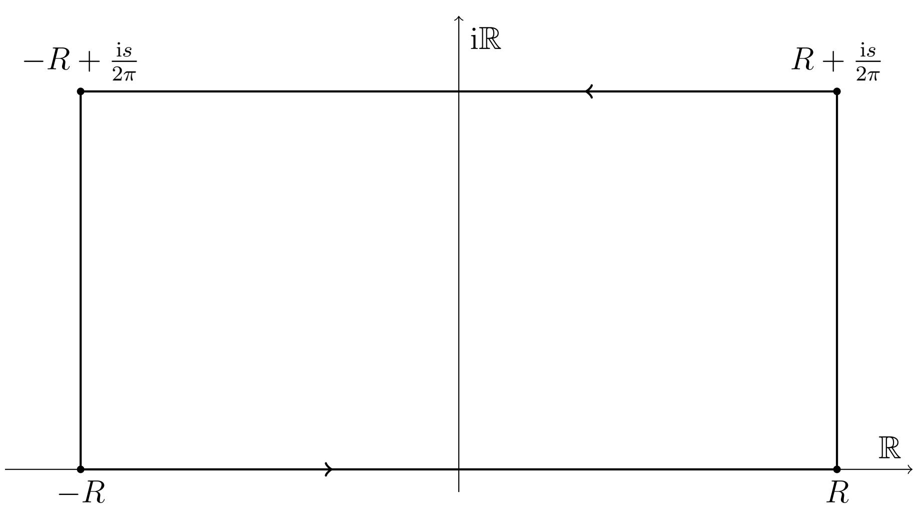

Abbildung 10.1: Der Weg γ.

(10.1c) Berechnen Sie die Fouriertransformation von
$$f(t) := \mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

erneut. Benutzen Sie diesesmal eine geeignete Substitution.

(10.1d) Benutzen Sie die Eigenschaften der Fouriertransformation, welche Sie aus der Vorlesung kennen, um die Fouriertransformation von

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

zu berechnen, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

Aufgabe 10.2 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung, welche die Ausbreitung einer Welle in einem Medium beschreibt. Sie ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{10.2.1}$$

wobei $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Typischerweise versehen wir die Wellengleichung mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10.2.2}$$

Die Anfangsbedingungen (10.2.2) kodieren, dass u zur Zeit $t = 0$ die Form f hat und in Ruhe ist.

(10.2a) Zeigen Sie, dass eine Lösung u der Wellengleichung (10.2.1) mit Anfangsbedingungen (10.2.2) die Eigenschaft hat, dass ihre Fouriertransformation

$$\widehat{u}(\xi,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2 \widehat{u}(\xi,t), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(x,0) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

erfüllt.

(10.2b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe (10.2a), dass die Fouriertransformation von u gegeben ist durch

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cos(\xi t), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

(10.2c) Benutzen Sie die Eigenschaften der Fouriertransformation aus der Vorlesung zusammen mit einer Fouriertabelle, um zu schliessen, dass

$$u(x,t) = (f * \Gamma_t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Gamma_t(x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{10.2.3}$$

wobei

$$\Gamma_t(x) = \frac{\delta(x-t) + \delta(x+t)}{2}.$$

Hinweis: δ beschreibt die Delta Distribution, welche durch die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y)\,\mathrm{d}y = f(0)$$

definiert ist.

(10.2d) [*Bonus*] Aus (10.2.3) folgt

$$u(x,t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}.$$

Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache (oder Stift und Papier), um u zu zeichnen für verschiedene $t > 0$ und

$$f(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2}.$$

Aufgabe 10.3 Einige Faltungsintegrale

Berechnen Sie die Faltung

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{R},$$

in den folgenden zwei Fällen:

i. Seien

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) := \begin{cases} t & \text{falls } 0 \le t < 1, \\ 1 & \text{falls } 1 \le t \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii. Seien

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 10.4 Eigenschaften der Fouriertransformation

In dieser Aufgabe wollen wir einige Transformationen betrachten, welche aus einer früheren Übung bereits bekannt sein könnten. Sei dazu $a \in \mathbb{R}$ und definiere die Translation um a durch

$$\mathrm{T}_a f(t) := f(t-a), \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion ist. Definiere weiterhing die Modulation durch

$$\mathrm{M}_a f(t) := f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Im Folgenden sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f * g$ absolut integrierbare Funktionen

(10.4a) Zeigen Sie, dass

$$(\mathrm{T}_a f)\widehat{\ }(s) = \mathrm{M}_{-a}\widehat{f}(s)$$

gilt.

(10.4b) Zeigen Sie, dass

$$(\mathrm{M}_a f)\widehat{\ }(s) = \mathrm{T}_a\widehat{f}(s)$$

gilt.

(10.4c) Zeigen Sie, dass

$$(f * g)\widehat{\ }(s) = \widehat{f}(s) \cdot \widehat{g}(s),$$

gilt.

Publiziert am 09. Mai.
Einzureichen am 16. Mai.