Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 11

Aufgabe 11.1 Eine Anwendung des Satzes von Plancherel

(11.1a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 1 - t^2 & \text{wenn } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und berechnen Sie ihre Fouriertransformation.

(11.1b) Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe (11.1a) den Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sin(s) - s\cos(s)\right)^2}{s^6}\,\mathrm{d}s.$$

(11.1c) [*Bonus*] Können Sie ein anderes Integral auf diese Art und Weise berechnen?

Hinweis: Achtung! Beim Kreeieren von eigenen Beispielen muss man immer darauf achten, dass die Integrale auch wirklich konvergieren.

Aufgabe 11.2 Das Riemann–Lebesgue Lemma

Ziel dieser Aufgabe ist es das Riemann–Lebesgue Lemma zu beweisen:

Sei f absolut integrabel, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{|s|\to\infty} \widehat{f}(s) = 0.$$

(11.2a) Beginnen Sie damit zu zeigen, dass wenn f absolut integrabel ist,

$$\left|\widehat{f}(s)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

gilt, für beliebige $s \in \mathbb{R}$.

(11.2b) Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\chi_{[a,b]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und berechnen Sie ihre Fouriertransformation. Zeigen Sie dann, dass

$$\lim_{|s|\to\infty} \widehat{\chi_{[a,b]}}(s) = 0.$$

(11.2c) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $a_j < b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$. Seien desweiteren $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, N$, und betrachten Sie die Funktion

$$g(t) := \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{[a_j, b_j]}(t). \tag{11.2.1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe (11.2b), dass

$$\lim_{|s| \to \infty} \widehat{g}(s) = 0.$$

(11.2d) Sei nun f absolut integrierbar. Dann kann man zeigen (dies ist allerdings nicht Teil dieser Aufgabe), dass es eine Funktionenfolge $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gibt, in welcher alle g_n von der Form (11.2.1) sind und welche

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g_n(t)| \, \mathrm{d}t = 0 \tag{11.2.2}$$

erfüllt. Benutzen Sie dies und die Aufgaben (11.2a) und (11.2c), um

$$\lim_{|s| \to \infty} \widehat{f}(s) = 0$$

zu folgern.

Aufgabe 11.3 Laplacetransformationen Berechnen - I

Entscheiden Sie bei den folgenden Funktionen, ob die Laplacetransformation existiert. Existiert die Transformation, so berechnen Sie sie. Existiert die Transformation nicht, so erklären Sie warum.

i. $\log(t)$

ii. e^{3t}

iii. e^{t^2}

iv. $\mathrm{e}^{1/t}$

v. $1/t$

Hinweis: In einer der Aufgabe wird die Euler–Mascheroni Konstante

$$\gamma := -\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \log(x) \, \mathrm{d}x$$

auftauchen.

Aufgabe 11.4 Laplacetransformationen Berechnen - II

(11.4a) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen.

i. $\mathrm{e}^{\alpha t}$

ii. t^2

iii. $\cosh(t)$

(11.4b) Berechnen Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen.

i. $t^2 \mathrm{e}^{-3t}$ ii. $4t + 6\mathrm{e}^{4t}$ iii. $\mathrm{e}^{-4t} \sin(5t)$

Publiziert am 16. Mai.
Einzureichen am 23. Mai.