Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 12

Aufgabe 12.1 Laplacetransformationen Berechnen - III

Finden Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen:

i.
$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 \leq t < 6, \\ 3 & \text{wenn } 6 \leq t. \end{cases}$$

ii.
$$f(t) := \begin{cases} 3 & \text{wenn } 0 \leq t < 5, \\ 10 & \text{wenn } 5 \leq t < 8, \\ 0 & \text{wenn } 8 \leq t. \end{cases}$$

iii.
$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 \leq t < 3, \\ 6\sin(t-3) & \text{wenn } 3 \leq t. \end{cases}$$

iv.
$$f(t) := \begin{cases} 4 & \text{wenn } 0 \leq t < 2, \\ 4 + 5(t-2)\mathrm{e}^{t-2} & \text{wenn } 2 \leq t. \end{cases}$$

Aufgabe 12.2 Laplacerücktransformation und Faltung

(12.2a) Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{1}{s^2(s^2+a^2)}.$$

Benutzen Sie dazu eine Partialbruchzerlegung.

(12.2b) Bestimmen Sie erneut die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{1}{s^2(s^2+a^2)}.$$

Benutzen Sie diesesmal den Faltungssatz aus der Vorlesung.

(12.2c) Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{-2s^2+18s-3}{s^3-s^2-8s+12}$$

durch eine Methode Ihrer Wahl.

Aufgabe 12.3 Satz von Bromwich und Residuensatz

Sei $\mathcal{L}[f]$ die Laplacetransformation einer Originalfunktion f. Liegen alle Singularitäten von $\mathcal{L}[f]$ zur Linken des Weges $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \lambda + \mathrm{i}t$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt laut dem *Satz von Bromwich*, dass

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_\gamma \mathcal{L}[f](s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s, \qquad t > 0.$$

(12.3a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Benutzen Sie den Satz von Bromwich und den Residuensatz angewandt auf den Weg γ_R in Abbildung 12.1, um zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-n}](t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

gilt.

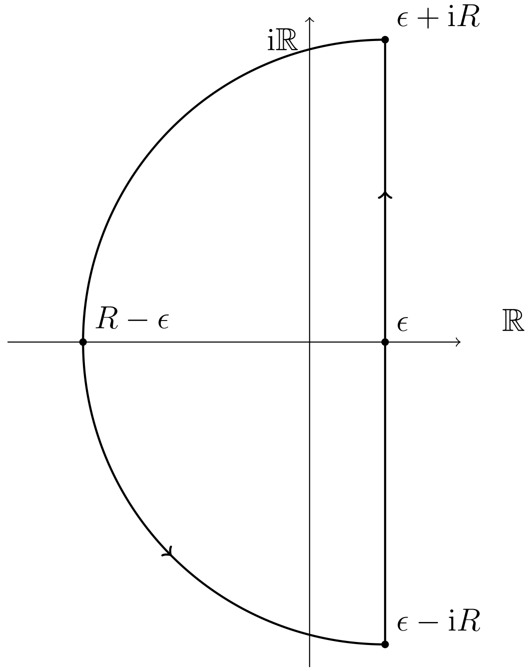

Abbildung 12.1: Der Weg γ_R für Aufgabe (12.3a).

(12.3b) [*Bonus*] Benutzen Sie den Satz von Bromwich und den Satz von Cauchy angewandt auf den Weg γ_R in Abbildung 12.2, um zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right](t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

gilt.

Hinweis: Das Integral über γ_R muss in ein Integral über sechs Teilstücke aufgetrennt werden. Man kann zeigen, dass drei dieser Integrale verschwinden, wenn man geeignete Grenzwerte bildet. Für die beiden Integrale über die Kreissektoren mit Radius R, lässt man R gegen unendlich gehen und benutzt die bekannte Abschätzung $\sin(\pi t) \geq 2t$, $t \in [0, 1/2]$. Für das Integral über den Kreissektor mit Radius ϵ, lässt man ϵ gegen Null gehen. Die restlichen Integrale verschwinden nicht. Beachten Sie jedoch die Unstetigkeit der komplexen Wurzelfunktion auf der Achse $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Wir arbeiten hier mit dem Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion.

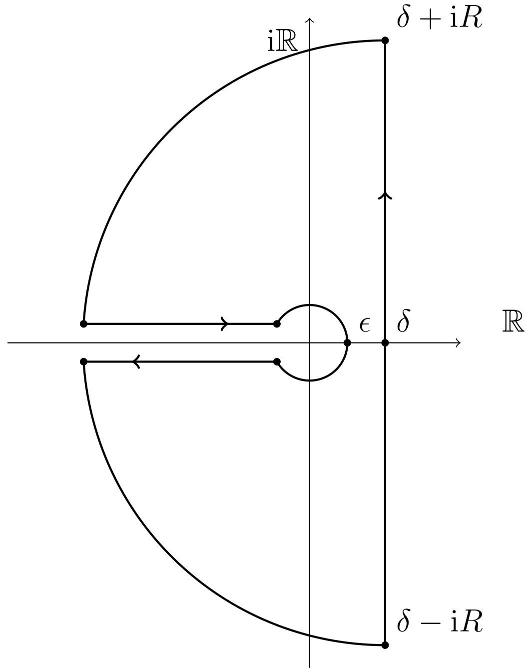

Abbildung 12.2: Der Weg γ_R für Aufgabe (12.3b).

Aufgabe 12.4 Zwei Differentialgleichungen

(12.4a) Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\dot{y}(t) + y(t) = \mathrm{e}^t, \qquad t > 0, \qquad y(0) = 1.$$

(12.4b) Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2y(t) = 4t^2, \qquad t > 0,$$
$$\dot{y}(0) = 4, \qquad y(0) = 1.$$

Publiziert am 23. Mai.

Einzureichen am 30. Mai.