Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 2

Hinweis: Auf diesem Aufgabenblatt gibt es ein paar Aufgaben, welche etwas schwieriger sind als die anderen. Diese sind mit [*Bonus*] gekennzeichnet.

Aufgabe 2.1 Grenzwerte komplexer Funktionen

(2.1a) Berechnen Sie die Limites (Grenzwerte) der folgenden Funktionen an $z_0 = 0$, sofern diese existieren:

i) $\frac{\overline{z}+z^2}{z}$,

ii) $\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{1+z}$,

iii) $\frac{\cos(z)-1}{z^2}$,

iv) $\frac{\sin(z)}{\overline{z}}$.

(2.1b) [*Bonus*] Betrachten Sie eine Funktion $f = u + \mathrm{i}v$ und komplexe Zahlen $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ gilt, genau dann wenn $\lim_{z\to z_0} u(z) = \mathrm{Re}\, w_0$ und $\lim_{z\to z_0} v(z) = \mathrm{Im}\, w_0$ gelten.

Aufgabe 2.2 Ableitungen komplexer Funktionen

(2.2a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen nach x und y und die Ableitung nach $z = x+\mathrm{i}y$ der folgenden Funktionen, sofern diese existieren:

i) $3z^3 + z - 3$,

ii) $\sin(\mathrm{Re}(z))$,

iii) $\frac{1}{z^2}$,

iv) $\mathrm{e}^{-\pi z^2}$.

(2.2b) [*Bonus*] Setzen Sie die Funktion $f(z) := \frac{\overline{z}^2}{z}$ an $z_0 = 0$ stetig fort. Ist das Resultat an $z_0 = 0$ nach z differenzierbar?

Aufgabe 2.3 Der Hauptwert des Logarithmus

Finden Sie zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so dass

$$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2).$$

Aufgabe 2.4 De Moivres Formel

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie de Moivres Formel

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = \cos n\phi + \mathrm{i}\sin n\phi.$$

Aufgabe 2.5 Eine Kuriose Identität

Berechnen Sie

$$(-1+\mathrm{i})^{103}.$$

Aufgabe 2.6 Die Mitternachtsformel

Beweisen Sie die Mitternachtsformel. Zur Erinnerung: Die Mitternachtsformel besagt, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit $a \neq 0$ und $a, b, c \in \mathbb{C}$ gegeben sind durch

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

wobei beide (komplexe) Quadratwurzeln Lösungen sind, wenn $b^2 - 4ac \neq 0$.

Bemerkung: Die Mitternachtsformel wird wahlweise auch p-q Formel oder grosse Lösungsformel genannt.

Aufgabe 2.7 Ein komplexes Polynom

(2.7a) Schreiben Sie die Funktion $f(z) := z^3 + z + 1$ in der Form $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.

(2.7b) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ und $|f(z)|$ auf dem Gebiet $\{z = x + \mathrm{i}y \,|\, x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1]\}$ zu plotten.

Publiziert am 28. Februar.

Einzureichen am 07. März.