Serie 3

Aufgabe 3.1 Einschreibung in Echo

Wichtig: Bitte schreiben Sie sich auf echo.ethz.ch in die Übungsstunde, welche Sie auch besuchen, ein! Dies bedeutet, dass Sie sich eventuell aus einer Übungsstunde ausschreiben müssen, die Sie nicht besuchen.

Hinweis: Das Umschreiben in die korrekte Übungsstunde hilft uns dabei den Assistierenden frühzeitig mitzuteilen, sollte niemand in ihre Stunden kommen, und die Räume der ETH wieder freizugeben.

Aufgabe 3.2 $\mathbb{R}$-Linearität und $\mathbb{C}$-Linearität

(3.2a) Betrachten Sie die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathrm{i}\mathbf{e}_1, \mathrm{i}\mathbf{e}_2\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}^2$ bildet.

(3.2b) Betrachte nun eine Matrix

$$A_L := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Die Matrix A_L beschreibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ in der Basis $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathrm{i}\mathbf{e}_1, \mathrm{i}\mathbf{e}_2\}$. Was muss für ihre Koeffizientent a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, gelten damit L auch $\mathbb{C}$-linear ist?

Aufgabe 3.3 Regel von de l'Hospital

Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die in einer Umgebung von $z_0 = 0$ differenzierbar sind und für die $f(0) = g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$ gilt. Dann gilt die Regel von de l'Hospital

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Aufgabe 3.4 Die Kettenregel

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sowohl $\gamma : [0, 1] \to U$, als auch $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Sei ausserdem $g(t) := f(\gamma(t))$. Leiten Sie die Kettenregel

$$g'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

her.

Aufgabe 3.5 Die Cauchy–Riemann Gleichungen

Wir benutzen die Notation

$$f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y), \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

Welche der im Folgenden definierten Funktionen sind holomorph?

(3.5a) $u(x,y):=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v(x,y):=4x^3y-4xy^3$.

(3.5b) $u(x,y):=x^3-3xy^2$, $v(x,y):=-3x^2y+y^3$.

(3.5c) $u(x,y):=\sin(x^2-y^2)\cosh(2xy)$, $v(x,y):=-\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy)$.

(3.5d) $u(x,y):=\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $v(x,y):=\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

Hinweis: Der Kosinus Hyperbolicus und der Sinus Hyperbolicus sind gegeben durch

$$\cosh(z):=\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \sinh(z):=\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Aufgabe 3.6 Die Cauchy–Riemann Gleichungen in Polarkoordinaten

Sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Wir können f dann in algebraischen Koordinaten als $f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ oder in Polarkoordinaten als $f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})=\widetilde{u}(r,\phi)+\mathrm{i}\widetilde{v}(r,\phi)$ schreiben. Die Cauchy–Riemann Gleichungen in algebraischen Koordinaten sind aus der Vorlesung bekannt und lauten

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}v(x,y).$$

Zeigen Sie, dass wenn f die Cauchy–Riemann Gleichungen in algebraischen Koordinaten erfüllt – also holomorph ist – dann f auch die Cauchy–Riemann Gleichungen in Polarkoordinaten

$$r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{u}(r,\phi)=\frac{\partial}{\partial\phi}\widetilde{v}(r,\phi), \qquad \frac{\partial}{\partial\phi}\widetilde{u}(r,\phi)=-r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{v}(r,\phi)$$

erfüllt.

Aufgabe 3.7 Das Wirtinger Kalkül

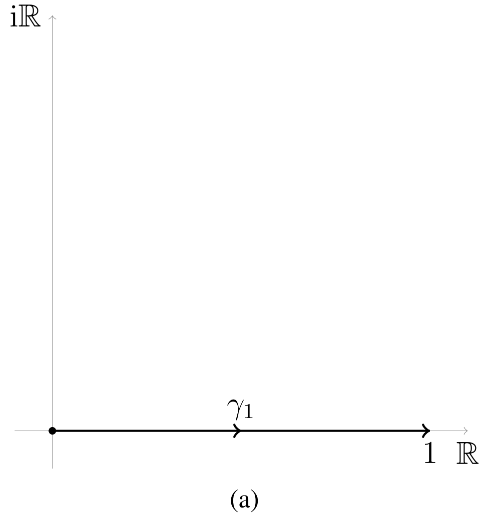
(3.7a) Sei $z=x+\mathrm{i}y$. Dann gilt

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{und} \qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Wenden Sie die Kettenregel auf informelle Art und Weise auf $F(x,y)$ an, um den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}F=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}F+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}F\right)$$

herzuleiten.



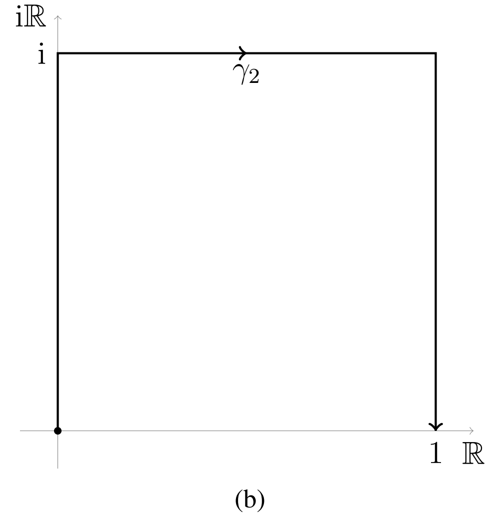


Abbildung 3.1: Die Wege γ_1 und γ_2.

(3.7b) Wir definieren den Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Zeigen Sie dass, wenn eine Funktion f holomorph ist – also ihr Real- und Imaginärteil die Cauchy–Riemann Gleichungen erfüllen – dann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$$

ist.

Bemerkung: Wir nennen $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ die *Wirtinger Ableitung*.

Aufgabe 3.8 Einige Wegintegrale

(3.8a) Betrachten Sie den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ im Uhrzeigersinn parametrisiert. Berechnen Sie nun

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} \,\mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(3.8b) Betrachten Sie die beiden Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$, welche in Abbildung 3.1 dargestellt sind. Berechnen Sie damit die Integrale

i) $\int_{\gamma_1} \mathrm{Re}(z) \,\mathrm{d}z$,

ii) $\int_{\gamma_2} \mathrm{Re}(z) \,\mathrm{d}z$,

iii) $\int_{\gamma_1} z^2 \,\mathrm{d}z$,

iv) $\int_{\gamma_2} z^2 \,\mathrm{d}z$.

Publiziert am 07. März.

Einzureichen am 14. März.