Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 4

Aufgabe 4.1 Die Divergenz von Vektorfeldern

(4.1a) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um die folgenden Vektorfelder zu zeichnen.

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}, \qquad g(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

(4.1b) Berechnen Sie die Divergenz der Vektorfelder f und g und zeichnen Sie diese in derselben Programmiersprache, die Sie in (4.1a) verwendet haben.

Aufgabe 4.2 Ein kompliziertes Pfadintegral

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2}\right) \mathrm{d}z,$$

wobei γ in Abbildung 4.1 gegeben ist.

Aufgabe 4.3 Verschiedene Stammfunktionen

(4.3a) Hat z^n, $n \in \mathbb{Z}$, auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion? Wenn ja, welche?

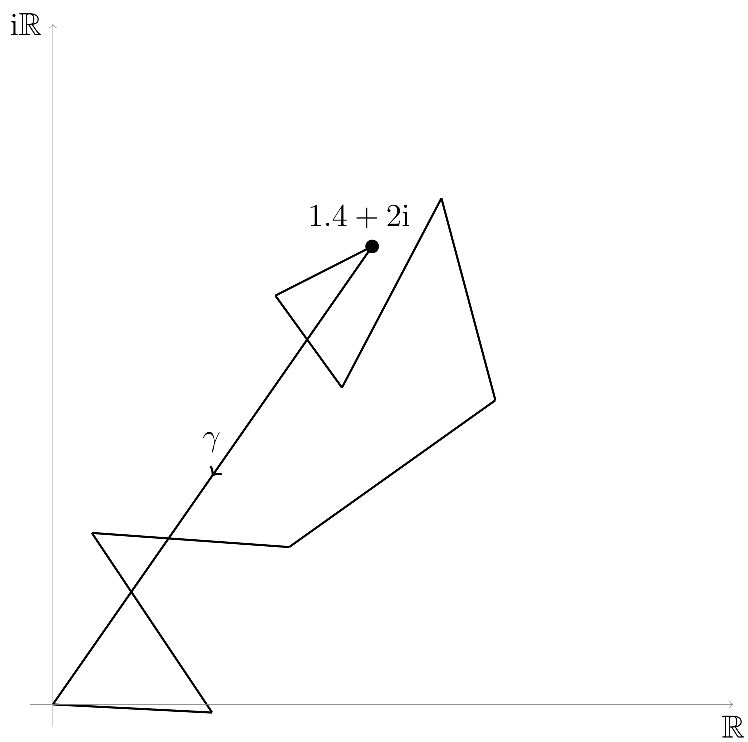


Abbildung 4.1: Der Weg γ.

(4.3b) Hat z^n, $n \in \mathbb{Z}$, auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ eine Stammfunktion? Wenn ja, welche?

(4.3c) Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $\ell : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gibt mit $\exp(\ell(z)) = z$.

Aufgabe 4.4 Harmonische Funktionen

Sei U einfach zusammenhängend und $u : U \to \mathbb{C}$ harmonisch, i.e.

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0.$$

Zeigen Sie: Es gibt $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\mathrm{Re}(f(x + \mathrm{i}y)) = u(x, y)$.

(4.4a) Nehmen Sie an es gäbe f. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$$

und dass die Ableitung von f somit eindeutig durch u bestimmt ist.

(4.4b) Wir benutzen nun also den Ansatz

$$g(z) := \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$$

für die Ableitung von f. Zeigen Sie, dass g holomorph ist.

(4.4c) Folgern Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ existiert mit $\mathrm{Re}\, f = u$.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Cauchy.

(4.4d) Ist das in Aufgabe (4.4c) konstruierte f eindeutig?

Aufgabe 4.5 Homotopie

(4.5a) Parametrisieren Sie die Kurve $y^2 = x^2(x + 1)$ in $\mathbb{C}$ vom Anfangspunkt $1 + \sqrt{2}\mathrm{i}$ bis zum Endpunkt $1 - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

(4.5b) Zeigen Sie, dass die parametrisierte Kurve aus Aufgabe (4.5a) homotop ist zur Kurve $\delta(t) := 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}(1 - 2t)$, $t \in [0, 1]$.

(4.5c) Seien $\gamma_0 \sim \gamma_1$ und $\delta_0 \sim \delta_1$ je zwei homotope Wege in $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei ausserdem $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = \delta_0(0) = \delta_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann

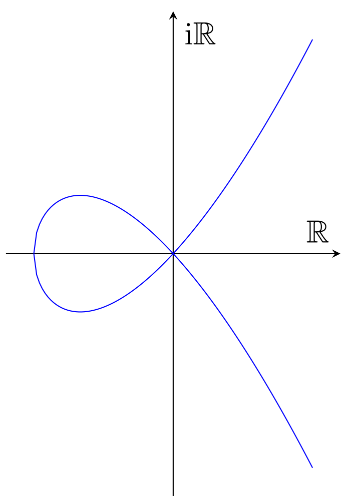
$$\gamma_0 * \delta_0 \sim \gamma_1 * \delta_1.$$

Also, dass die Wege $\gamma_0 * \delta_0$ und $\gamma_1 * \delta_1$ homotop sind.

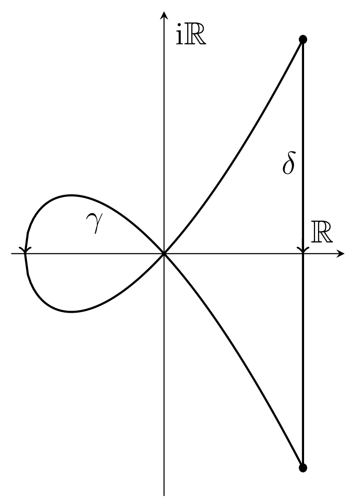
Hinweis: Die verschiedenen Objekte und Wege dieser Aufgabe sind in Abbildung 4.2 illustriert.

Publiziert am 14. März.

Einzureichen am 21. März.



(a) Die Kurve $y^2 = x^2(x+1)$.



(b) Zwei homotope Wege.

Abbildung 4.2: Illustration der Fragestellung in Aufgabe 4.5.