Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 6

Aufgabe 6.1 Der Konvergenzradius der Taylorreihe

(6.1a) Berechnen Sie die ersten drei Koeffizienten der Taylorentwicklung von

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^z}{(z-3)(z-2\mathrm{i})(z^2+2\mathrm{i})}$$

um $z_0 = 0$.

(6.1b) Was ist der Konvergenzradius der Taylorentwicklung um $z_0 = 0$ von f?

Aufgabe 6.2 Laurententwicklungen

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in ihre Laurentreihen:

i) $\cos(z^2)$ auf $\mathbb{C}$,

ii) $\frac{\sin z}{z}$ auf $\mathbb{C}$,

iii) $\frac{1}{z^2+z-2}$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$.

Aufgabe 6.3 Numerische Experimente zum Maximumsprinzip

Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um für sechs Polynome ihrer Wahl den Absolutbetrag auf dem Gebiet

$$G := \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1]\}$$

zu zeichnen. Was sehen Sie?

Aufgabe 6.4 Residuen Berechnen

Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an all ihren isolierten Singularitäten:

i) $\frac{1}{z+z^2}$,

ii) $z\cos(\frac{1}{z})$,

iii) $\frac{z-\sin z}{z}$,

iv) $\frac{\cot z}{z^4}$.

Hinweis: Die Laurententwicklung des Kotangens um $z_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots$$

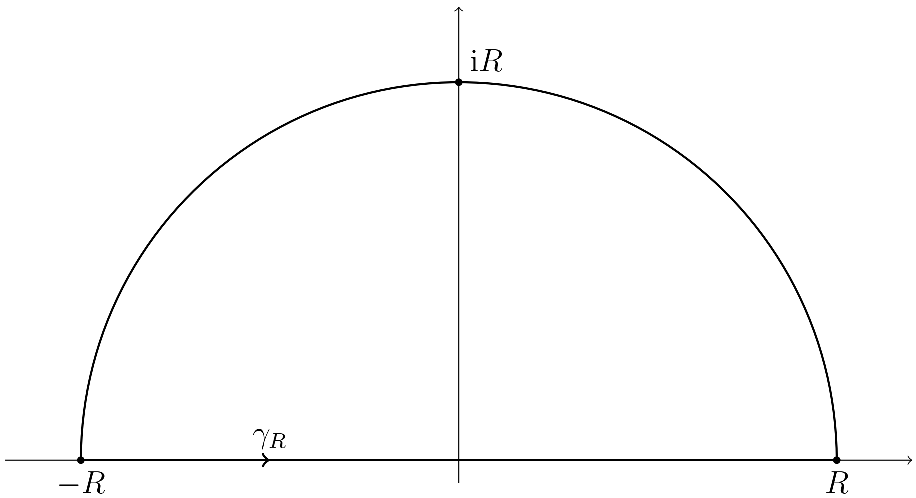

Abbildung 6.1: Der Weg γ_R.

Aufgabe 6.5 Ein reelles Integral

Berechnen Sie das Integral
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Wenden Sie den Residuensatz auf den Weg $\gamma_R : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher in Abbildung 6.1 gezeichnet ist, an. Dann lassen Sie R gegen unendlich gehen.

Publiziert am 28. März.

Einzureichen am 11. April.