Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 7

Aufgabe 7.1 Minimumprinzip und Fundamentalsatz der Algebra

(7.1a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie, dass wenn $|f|$ in $z_0 \in \Omega$ ein Minimum hat, dann $f(z_0) = 0$.

(7.1b) Schliessen Sie aus Aufgabe (7.1a) den Fundamentalsatz der Algebra: Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ des Grades $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 7.2 Wegintegral über eine Singularität

Seien $\epsilon > 0$ und $\alpha, \phi \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie den Weg $\gamma_\epsilon : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher durch

$$\gamma_\epsilon(t) := \epsilon \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t + \phi)}$$

gegeben ist und in Abbildung 7.1 dargestellt ist. Sei desweiteren $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 = 0$ und $f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einem Pol erster Ordnung an z_0. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \alpha \cdot \mathrm{i} \cdot \operatorname{Res}(f; 0)$$

gilt.

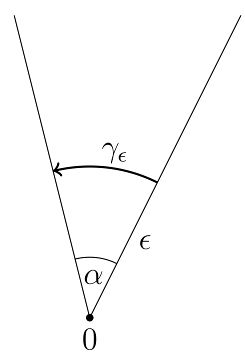

Abbildung 7.1: Der Weg γ_ϵ.

Aufgabe 7.3 Definite Integrale

(7.3a) Seien $a, b > 0$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

i) $\int_0^\infty \frac{z^2}{z^6+1}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{6}$,

ii) $\int_0^\infty \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,

iii) $\int_0^\infty \frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)\mathrm{e}^{-ab}$,

iv) $\int_0^\infty \frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{16a\sqrt{a}}$.

(7.3b) [*Bonus*] Benutzen Sie den Residuensatz und den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher in Abbildung 7.2 gegeben ist, um die Identität

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

zu zeigen.

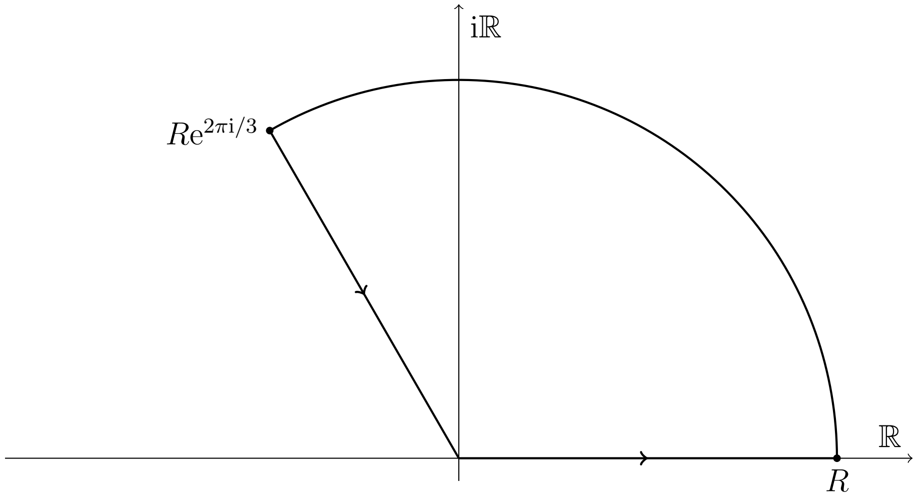

Abbildung 7.2: Der Weg γ_ϵ.

Aufgabe 7.4 Reihenberechnung durch den Residuensatz

(7.4a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \pi\cot(\pi z) = \pi \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

und zeigen Sie, dass f die einfachen Polstellen $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, hat und dass die Residuen von f an all diesen Polstellen den Wert eins haben.

(7.4b) Ziegen Sie, dass f auf dem Rand ∂Q_N des Quadrates

$$Q_N := [-(N+\tfrac{1}{2}), N+\tfrac{1}{2}] \times \mathrm{i}[-(N+\tfrac{1}{2}), N+\tfrac{1}{2}],$$

mit $N \in \mathbb{N}$, beschränkt ist durch eine obere Schranke, welche nicht von N abhängig ist.

(7.4c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt und folgern Sie aus dem Residuensatz die Identität

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hinweis: Die Laurententwicklung des Kotangens um $z_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots$$

Aufgabe 7.5 [*Bonus*] Weitere Reihen

(7.5a) Benutzen Sie Aufgabe 7.4, um die folgenden Reihen zu berechnen. Die Konstante a ist dabei so gewählt, dass die Nenner der Brüche in den Summen niemals verschwinden.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}$,

ii) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2}$,

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

(7.5b) Können Sie auch die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

berechnen?

Tipps

Da es möglicherweise keine Übungsstunde zu diesem Blatt geben wird, folgen nun einige Tipps. Wer die Aufgaben ohne Tipps lösen will, kann die folgenden Zeilen überlesen.

[*Aufgabe 7.1*] (a) Der kurze Beweis funktioniert per Widerspruch und benutzt das Maximumprinzip. (b) Hier wendet man (a) auf ein Polynom p an.

[*Aufgabe 7.2*] Wenden Sie hier die Laurententwicklung von f um $z_0 = 0$ an. Damit kann man das Integral explizit (in Abhängigkeit von a_{-1}) berechnen.

[*Aufgabe 7.3*] (a) Betrachten Sie die Integrationswege $\gamma_R^{(0)}, \gamma_R^{(1)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\gamma_R^{(0)}(t) := 2Rt - R$ und $\gamma_R^{(1)}(t) := R\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$ und lassen Sie R gegen unendlich gehen. Eines der beiden Integral verschwindet. Dann wenden Sie den Residuensatz an. (b) Zwei von drei Teilen des hier gegebenen Integrationsweges lassen sich wie in Aufgabe (a) behandeln. Der dritte wird bis auf einen konstanten Faktor gleich aussehen, wie einer der beiden ersten.

[*Aufgabe 7.4*] (a) Diese Aufgabe ist eine absolute Standardaufgabe. Also löst sie unbedingt. Sie ist auch nicht schwer. (b) In dieser Aufgabe soll man vier (oder drei) Fälle unterscheiden, indem man die vier Randabschnitte von ∂Q_N betrachtet. Man kann so zeigen, dass $|f(z)| \leq 2\pi$. (c) Zuerst schätzt man das Integral ab. Hierzu kann man die beliebte Abschätzung

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \max_{t \in [0,1]} |f(\gamma(t))|$$

benutzen, wobei $\ell(\gamma)$ die Länge des Weges γ beschreibt. Hat man dies getan, so nutzt man den Residuensatz und lässt N gegen unendlich gehen.

[*Aufgabe 7.5*] (a) All diese Beispiele funktionieren gleich wie Aufgabe 7.4. Wer nicht alle lösen möchte fängt am besten von hinten an (also mit iv)) und arbeitet sich dann vor. (b) Diese Aufgabe ist beinahe unmöglich schwierig. Wer Lust hat kann es einmal versuchen, sollte aber nicht verzweifeln, wenn es nicht funktioniert.

Publiziert am 18. April.

Einzureichen am 25. April.