Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

# Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

## Serie 8

### Aufgabe 8.1 Die reelle Fourier Reihe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eine *reellwertige*, stetige, $2\pi$-periodische Funktion. Wir betrachten die komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

**(8.1a)** Leiten Sie Ausdrücke für $\operatorname{Re} c_n$ und $\operatorname{Im} c_n$ her.

**(8.1b)** Isolieren Sie Real- und Imaginärteil von

$$f(t) = \hat{\hat{f}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

**(8.1c)** Zeigen Sie, dass

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt)$$

gilt, wobei

$$a_n := c_n + c_{-n}, \qquad b_n := \mathrm{i}(c_n - c_{-n}).$$

**(8.1d)** Zeigen Sie, dass:

i. Für alle $n \in \mathbb{Z}$, $b_n = 0$ gilt, genau dann wenn $f$ gerade ist.

ii. Für alle $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = 0$ gilt, genau dann wenn $f$ ungerade ist.

### Aufgabe 8.2 Berechnung einer Fourier Reihe - I

Wir betrachten die $2\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := t, \qquad t \in [0, 2\pi),$$

und $f(t + 2\pi) = f(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

**(8.2a)** Zeichnen Sie den Graphen von $f$.

**(8.2b)** Berechnen Sie die diskrete Fourier Transformation $\widehat{f}(n)$ von $f$.

**(8.2c)** Berechnen Sie die reelle Fourier Reihe von $f$

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt).$$

**(8.2d)** Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Graphen von

$$T_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt),$$

für $N = 1, 2, 5, 10, 100$, zu zeichnen.

**(8.2e)** Berechnen Sie $\hat{\hat{f}}(0)$. Was fällt Ihnen auf?

## Aufgabe 8.3 Berechnung einer Fourier Reihe - II

Wir betrachten die $2\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := |t|, \qquad t \in (-\pi, \pi],$$

und $f(t + 2\pi) = f(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

**(8.3a)** Zeichnen Sie den Graphen von $f$.

**(8.3b)** Berechnen Sie die diskrete Fourier Transformation $\widehat{f}(n)$ von $f$.

**(8.3c)** Berechnen Sie die reelle Fourier Reihe von $f$

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt).$$

**(8.3d)** Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Graphen von

$$T_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt),$$

für $N = 1, 2, 5, 10, 100$, zu zeichnen.

**(8.3e)** Berechnen Sie $\hat{\hat{f}}(0)$. Was fällt Ihnen auf?

## Aufgabe 8.4 [*Bonus*] Eigenschaften der diskreten Fourier Transformation

In der Vorlesung hatten wir die diskrete Fourier Transformation einer stetigen, $2\pi$-periodischen Funktion $f$ eingeführt als

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Wir werden nun einige der wichtigsten Eigenschaften der Fourier Transformation beweisen.

**(8.4a)** Sei $\tau \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Translationsoperator $\mathrm{T}_\tau$ definiert durch

$$\mathrm{T}_\tau[f](t) := f(t - \tau).$$

Zeigen Sie, dass

$$\widehat{\mathrm{T}_\tau[f]}(n) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau} \cdot \widehat{f}(n)$$

gilt.

**(8.4b)** Sei $\tau \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Modulationsoperator $\mathrm{M}_\tau$ definiert durch

$$\mathrm{M}_\tau[f](t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau t} \cdot f(t).$$

In Aufgabe (8.4a) haben Sie gezeigt, dass $\widehat{\mathrm{T}_\tau[f]}(n) = \mathrm{M}_{-\tau}[\widehat{f}](n)$ gilt. Zeigen Sie nun, dass für $m \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\mathrm{M}_m[f]}(n) = \mathrm{T}_m[\widehat{f}](n)$$

gilt.

**(8.4c)** Seien nun $f$ und $g$ zwei stetige, $2\pi$-periodische Funktionen. Wir definieren die Konvolution von $f$ und $g$ als die Funktion

$$(f * g)(\tau) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) g(\tau - t) \,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$$

gilt

Publiziert am 25. April.
Einzureichen am 02. Mai.