Komplexe Analysis D-ITET

Serie 9

Aufgabe 9.1 Fourier- und Taylorkoeffizienten

(9.1a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(t) := f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. Berechnen Sie die Fourierreihe von g in Abhängigkeit von den Taylorkoeffizienten von f. Was sind die Fourierkoeffizienten von g?

(9.1b) Benutzen Sie Ihre Erkenntnis aus Aufgabe (9.1a), um die Cauchysche Integralformel herzuleiten.

Hinweis: Die Cauchysche Integralformel besagt

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n-1}} \,\mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(9.1c) Wir betrachten den Sinus hyperbolicus gegeben durch

$$\sinh(z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

i. Berechnen Sie die Taylorreihe von $\sinh(z)$ basierend auf der bekannten Reihe für die Exponentialfunktion.

ii. Berechnen Sie die Fourierreihe von $g(t) = \sinh(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.

(9.1d) [*Bonus*] Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Real- und Imaginärteil der trigonometrischen Polynome

$$T_N(t) := \sum_{n=0}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \qquad t \in \mathbb{R},$$

aus Aufgabe (9.1c) für $N = 1, 3, 20$ zu zeichnen.

Aufgabe 9.2 Ein Cauchy Hauptwert

Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Das Ziel dieser Aufgabe ist es

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(a-t)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(b-t)}}{s} \,\mathrm{d}s$$

zu berechnen.

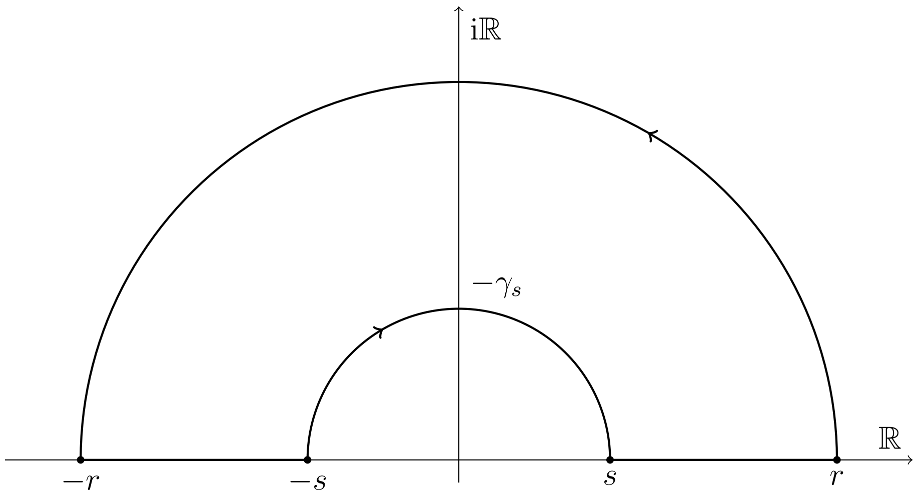

Abbildung 9.1: Der Weg γ mit Wegstück γ_s.

(9.2a) Zeigen Sie

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}.$$

Benutzen Sie dazu den Integralsatz von Cauchy und den Weg γ, welcher in Abbildung 9.1 gezeichnet ist.

Hinweis: In Serie 7 hatten wir gesehen, dass

$$\lim_{s\to 0}\int_{\gamma_s} f(z)\,\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}(f;0)$$

gilt, wenn γ_s das in Abbildung 9.1 eingezeichnete Wegstück von γ ist und $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit Pol erster Ordnung an $z_0=0$ ist. Ausserdem wird es hilfreich sein, die Abschätzung $\sin(\pi t)\geq 2t$, $t\in[0,1/2]$, zu verwenden.

(9.2b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(a-t)}}{s}\,\mathrm{d}s=\begin{cases}1/2 & \text{wenn } a<t,\\ 0 & \text{wenn } a=t,\\ -1/2 & \text{wenn } a>t.\end{cases}$$

(9.2c) Folgern Sie nun, dass

$$f(t)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(a-t)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(b-t)}}{s}\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0 & \text{wenn } t<a,\\ 1/2 & \text{wenn } t=a,\\ 1 & \text{wenn } a<t<b,\\ 1/2 & \text{wenn } t=b,\\ 0 & \text{wenn } t>b.\end{cases}$$

Aufgabe 9.3 Bestapproximation im Raum der trig. Polynome

Sei f eine 2π-periodische Funktion mit Fourierkoeffizienten c_n. Betrachten Sie die partielle Fourierreihe

$$T_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{int}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei $N \in \mathbb{N}$. Sei nun p ein allgemeines trigonometrisches Polynom vom Grad N, d.h.

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{N} p_n \mathrm{e}^{int}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit $p_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\|f - T_N\| \leq \|f - p\|.$$

Hinweis: Man braucht hier lediglich Erkenntnisse aus der lineare Algebra anzuwenden. Betrachten Sie insbesondere das Skalarprodukt

$$(f, g) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 9.4 [*Bonus*] Die Haar Transformation

In[1] der Theorie der Reihenentwicklung reell- oder komplexwertiger Funktionen spielen die sogenannten *orthogonalen Funktionensysteme* eine führende Rolle. Man versteht darunter üblicherweise ein System unendlich vieler Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ auf einem intervall I, typischerweise $I = [0, 2\pi]$ oder $I = [0, 1]$, die die Orthonormalitätseigenschaft

$$\int_I \varphi_p(t)\overline{\varphi_q(t)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = q, \\ 0 & \text{falls } p \neq q, \end{cases}$$

besitzen. In der klassischen Fourieranalyse 2π-periodischer komplexwertiger Funktionen betrachten wir das orthogonale Funktionensystem $\{\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \ldots\}$ mit $e_n(t) = e^{int}$. Für reelwertige 2π-periodische Funktionen eignet sich das orthogonale Funktionensystem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(t), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(t), \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt), \ldots$$

gut. Der Einfachheit halber betrachten wir im folgenden nur reellwertige Funktionen auf dem Intervall $I = [0, 1]$, und nehmen stillschweigend an dass alle Funktionen stückweise stetig und beschränkt sind. Sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein beliebiges orthogonales Funktionensystem. Für jede Funktion f auf I können wir nun Fourierkoeffizienten

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle := \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

definieren. Die formal gebildete unendliche Reihe

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) + \cdots \tag{9.4.1}$$

[1] Frei nach: A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Göttinger Inauguraldissertation (1909) und gleichnamigem Artikel in: Mathematische Annalen, **69** (3): 331–371, (1910)

nennen wir *Fourier Reihe* von f in Bezug auf das gegebene orthogonale Funktionensystem. Das orthogonale Funktionensystem wird *vollständig* genannt, falls für jede Funktion f die Relation

$$\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

gilt. Im klassischen Fall läuft das auf den Satz von Parseval hinaus, der in diesem Sinne besagt dass das orthogonale Funktionensystem $\{\dots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots\}$ vollständig ist. Ein allgemeiner Satz aus der Theorie der topologischen Vektorräume besagt, dass die Fourier Reihe (9.4.1) bezüglich eines orthogonalen Funktionensystems in einer gewissen Weise (*caveat emptor*) gegen f konvergiert.

Wir beschreiben nun ein bestimmtes orthogonales Funktionensystem χ, bestehend aus reellwertigen Funktionen

$$\chi_0, \;\; \chi_{1,1}, \;\; \chi_{2,1}, \chi_{2,2}, \;\; \chi_{3,1}, \dots, \chi_{n,k}, \dots$$

für allgemeine Indizes $n \geq 1$ und $1 \leq k \leq 2^{n-1}$. Dieses System wurde zum ersten Mal in den bereits erwähnten Arbeiten von Alfréd Haar eingeführt. Es spielt heute in der Theorie der Wavelets eine zentrale Rolle. Es sei $\chi_0 = 1$ im ganzen Intervall $I = [0, 1]$, und sei

$$\chi_1(t) = \begin{cases} +1 & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Wir setzen ferner

$$\chi_{2,1}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ -\sqrt{2} & \text{falls } \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{falls } \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases} \qquad \chi_{2,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}, \\ -\sqrt{2} & \text{falls } \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

und allgemein definieren wir $\chi_{n,k}$ für $n \geq 2$ und $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ wie folgt: Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in 2^n gleiche Teile, und bezeichnen diese der Reihe nach mit $I_{n,1}, I_{n,1}, \dots, I_{n,2^n}$. Dann setzen wir

$$\chi_{n,k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^{n-1}} & \text{falls } t \text{ im Intervall } I_{n,(2k-1)}, \\ -\sqrt{2^{n-1}} & \text{falls } t \text{ im Intervall } I_{n,2k}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

für alle $n \geq 2$ und alle $1 \leq k \leq 2^{n-1}$.

(9.4a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\chi_0, \chi_1, \chi_{2,1}, \chi_{2,2}, \dots, \chi_{n,k}, \dots$ ein orthogonales Funktionensystem bilden.

(9.4b) Zeigen Sie, dass das orthogonale Funktionensystem χ vollständig ist.

Hinweis: Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, stückweise stetig und beschränkt, und

$$c_{n,k} := \int_0^1 f(t)\chi_{n,k}(t) \,\mathrm{d}t \tag{9.4.2}$$

für alle n und k. Zeigen Sie mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen dass es genügt anzunehmen dass $c_{n,k} = 0$ für alle n und k gilt, um daraus $\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$ zu folgern. Anschliessend betrachten

Sie zu diesem Zweck die Stammfunktion $F(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$. Das ist eine stetige Funktion mit $F(0) = 0$. Aus 9.4.2 erhält man nun

$$F(1) = 0, F(\tfrac{1}{2}) = 0, F(\tfrac{1}{4}) = 0, F(\tfrac{3}{4}) = 0, \ldots$$

und induktiv $F(d2^{-n}) = 0$, für jeden Dualbruch $d2^{-n}$ mit $n \geq 0$ und $0 \leq d \leq 2^n$. Es folgt $F = 0$, und daraus erhält man leicht $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$.

(9.4c) Sei $f(t) = \sin(2\pi t)$. Berechnen Sie mit Maschinenhilfe $c_{n,k}$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ und alle möglichen k die Fourierkoeffizienten $c_{n,k}$ und zeichnen Sie den Graphen der Teilsumme

$$f_4(t) = c_0\chi_0(t) + c_{1,1}\chi_{1,1}(t) + c_{1,2}\chi_{1,2}(t) + \cdots + c_{4,8}\chi_{4,8}(t).$$

Experimentieren Sie nach Belieben mit weiteren Funktionen f und grösseren Teilsummen.

Stichworte für Internet Recherche: Haar Transformation, Haar Wavelet, discrete Wavelet transform.