Prof. Dr. P. S. Jossen Ostern 2018

Musterlösung des Midterms Komplexe Analysis

Aufgabe 1 [6 Punkte] Sei γ ein geschlossener Weg, welcher den Rand des Quadrates

$$Q := \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid x \in [-2, 2],\ y \in [-1, 1]\}$$

in positiver Richtung einmal umläuft. Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_\gamma \frac{(z-10)^2}{\sin z}\,\mathrm{d}z.$$

Lösung Der Integrand $f(z) := \frac{(z-10)^2}{\sin z}$ hat seine Singularitäten genau an den Nullstellen des Nenners, welche durch

$$z_n = \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

gegeben sind. Von all diesen Singularitäten liegt lediglich diejenige an $z_0 = 0$ in Q. Die Singularität an z_0 ist ein Pol erster Ordnung und wir berechnen ihr Residuum durch

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 10^2 \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 10^2 \cdot \lim_{z \to 0} \frac{1}{\cos z} = 100.$$

Laut dem Residuensatz gilt also

$$\int_\gamma \frac{(z-10)^2}{\sin z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f; z_0) = 200\pi\mathrm{i}.$$

Aufgabe 2 [6 Punkte] Betrachten Sie die folgenden Funktionen f und berechnen Sie sowohl ihre Taylorreihen um $z_0 \in \mathbb{C}$ als auch deren Konvergenzradien:

a) $f(z) = \mathrm{e}^z$, $z_0 = 1$,

b) $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$, $z_0 = 0$.

Lösung

a) Wir benutzen die bekannte Reihenentwicklung der Exponentialfunktion. Damit erhalten wir

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{z-1} = \mathrm{e} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0} \frac{\mathrm{e}}{n!}(z-1)^n.$$

Da f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist folgt, dass der Konvergenzradius der Taylorentwicklung um $z_0 = 1$ unendlich ist.

b) Wir faktorisieren den Nenner von f durch

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}.$$

Als nächstes machen wir eine Partialbruchzerlegung und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}.$$

Nehmen wir nun an, dass $|z| < 2$ gilt, so folgt mit der geometrischen Reihe, dass

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - z/2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - z/3} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n. \end{aligned}$$

gilt. Da f holomorph auf $B(0,2)$ ist, folgt, dass der Konvergenzradius der Taylorreihe um $z_0 = 0$ genau 2 ist.

Frage 1 [4 Punkte] Welche der folgenden Funktionen $f(z) = f(x + \mathrm{i}y)$ sind auf $\mathbb{C}$ holomorph und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

i. $\sin(z^2)$,

ii. $(\bar{z})^2$,

iii. $(x^3 - 3xy^2 - 2x) + \mathrm{i} \cdot (3x^2y - y^3 - 2y)$,

iv. $(x^3 - x^2 - 3xy^2 + y^2) - \mathrm{i} \cdot (3x^2y + 2xy - y^3)$.

Lösung

i. $\sin(z^2)$ ist *holomorph*. Man sieht dies entweder durch das Nachprüfen der Cauchy–Riemann Gleichungen, oder aber indem man realisiert, dass sowohl z^2 als auch $\sin z$ holomorphe Funktionen sind und dass Verknüpfungen holomorpher Funktionen holomorph sind.

ii. $(\bar{z})^2$ ist *nicht holomorph*. Man sieht dies indem man die Cauchy–Riemann Gleichungen überprüft. Wir haben

$$(x - \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 - 2\mathrm{i}xy.$$

Damit gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 2x \neq -2x = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y),$$

wenn $x \neq 0$, und somit, dass $(\bar{z})^2$ nicht holomorph ist.

iii. $(x^3 - 3xy^2 - 2x) + \mathrm{i} \cdot (3x^2y - y^3 - 2y)$ ist *holomorph*. Wir prüfen dazu die Cauchy–Riemann Gleichungen und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 2 = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)$$

wie auch

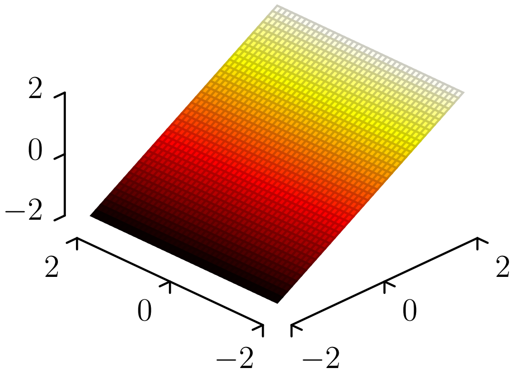
$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = -6xy = -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y).$$

iv. $(x^3 - x^2 - 3xy^2 + y^2) - \mathrm{i} \cdot (3x^2y + 2xy - y^3)$ ist *nicht holomorph*. Es gilt nämlich

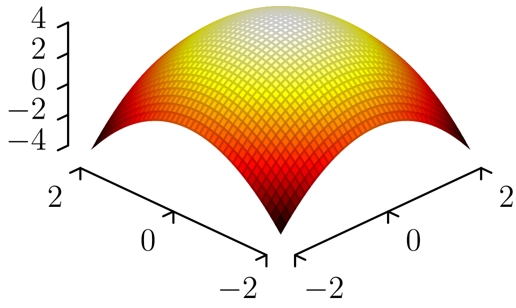
$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 3x^2 - 2x - 3y^2 \neq -3x^2 - 2x + 3y^2 = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)$$

im Allgemeinen und daher sind die Cauchy–Riemann Gleichungen nicht erfüllt.

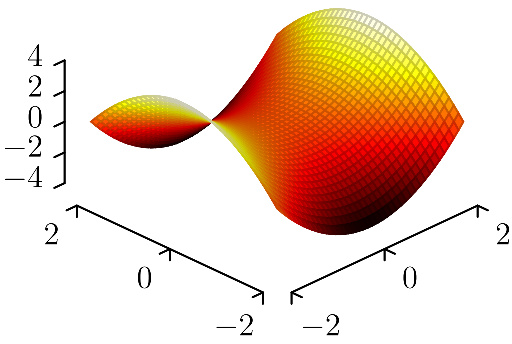
Frage 2 [4 Punkte] Welche der folgenden Graphen stellen sicherlich *nicht* den Realteil einer holomorphen Funktion dar? Begründen Sie Ihre Antworten.



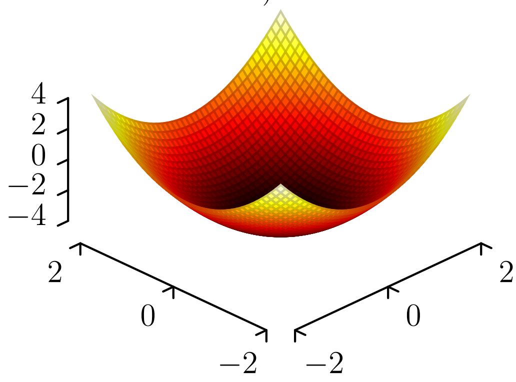
i)



ii)



iii)



iv)

Lösung

i. Dieser Graph verletzt das Maximumprinzip nicht und ist de facto der Graph des Realteils der holomorphen Funktion $f(z) = z$.

ii. Dieser Graph hat ein lokales Maximum und kann deswegen laut des Maximumprinzips nicht der Realteil einer holomorphen Funktion sein.

iii. Dieser Graph verletzt das Maximumprinzip nicht und ist de facto der Graph des Realteils der holomorphen Funktion $f(z) = z^2$.

iv. Dieser Graph hat ein lokales Minimum. Deswegen kann er nicht der Realteil einer holomorphen Funktion sein. Wir werden dies im Folgenden kurz herleiten. Ist f holomorph, so gilt laut dem Mittelwertsatz, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$
$$f(z) = \int_0^1 f(z + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t,$$
und somit auch
$$\mathrm{Re} f(z) = \int_0^1 \mathrm{Re} f(z + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t.$$
Damit ergibt sich die Abschätzung
$$\mathrm{Re} f(z) \geq \min_{t\in[0,1]} \mathrm{Re} f(z + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}).$$
Hat $\mathrm{Re} f$ also ein lokales Minimum an z, so folgt dass $\mathrm{Re} f$ in einer Umgebung von z konstant sein muss. Laut den Cauchy–Riemann Gleichungen, muss f also in einer Umgebung von z konstant sein. Laut dem Identitätssatz, ist f dann überall konstant.