Komplexe Analysis D-ITET

Serie 1

Aufgabe 1.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

(1.1a) Berechnen Sie die folgenden Terme:

i) $(-14+7\mathrm{i})+(8-\mathrm{i})$,

ii) $(4+8\mathrm{i})-(14+7\mathrm{i})$,

iii) $(-2+\mathrm{i})\times(-9+15\mathrm{i})$,

iv) $(12+3\mathrm{i})\div(12+6\mathrm{i})$.

Lösung: Wir erhalten

i) $-6+6\mathrm{i}$,

ii) $-10+\mathrm{i}$,

iii) $3-39\mathrm{i}$,

iv) $\frac{9}{10}-\frac{\mathrm{i}}{5}$,

wobei wir

$$\frac{12+3\mathrm{i}}{12+6\mathrm{i}}=\frac{(12+3\mathrm{i})(12-6\mathrm{i})}{(12+6\mathrm{i})(12-6\mathrm{i})}=\frac{162-36\mathrm{i}}{180}=\frac{9}{10}-\frac{\mathrm{i}}{5}$$

benutzt haben.

(1.1b) Berechnen Sie die folgenden Terme durch Ausnutzung der Polarform:

i) $(-\mathrm{i})\div(1-\mathrm{i})$,

ii) $(-2-2\mathrm{i})\times(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$,

iii) $((1+\sqrt{3}\mathrm{i})\div(\sqrt{3}+\mathrm{i}))^{18}$.

Hinweis: Sie dürfen die Lösung in Polarform angeben.

Lösung: Ganz im Allgemeinen berechnen sich der Radius und Winkel einer komplexen Zahl $z=x+\mathrm{i}y$ durch

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \phi=\begin{cases}\arccos\frac{x}{r} & \text{wenn } y\geq 0,\\ -\arccos\frac{x}{r} & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wir wollen dies nun auf die obige Aufgabe anwenden:

i) Man sieht, dass $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}$. Ausserdem erhalten wir $r=\sqrt{2}$ und $\phi=-\arccos(1/\sqrt{2})=-\pi/4$ für $z=1-1\mathrm{i}$. Somit gilt

$$(-\mathrm{i})\div(1-\mathrm{i})=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}.$$

ii) Wir berechnen, dass $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und $\phi = -\arccos(-1/\sqrt{2}) = -3\pi/4$ für $z = -2-2\mathrm{i}$. Desweiteren gilt $r = 2$ und $\phi = \arccos(1/2) = \pi/3$ für $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$. Somit ist

$$(-2-2\mathrm{i}) \times (1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{5\pi\mathrm{i}}{12}}$$

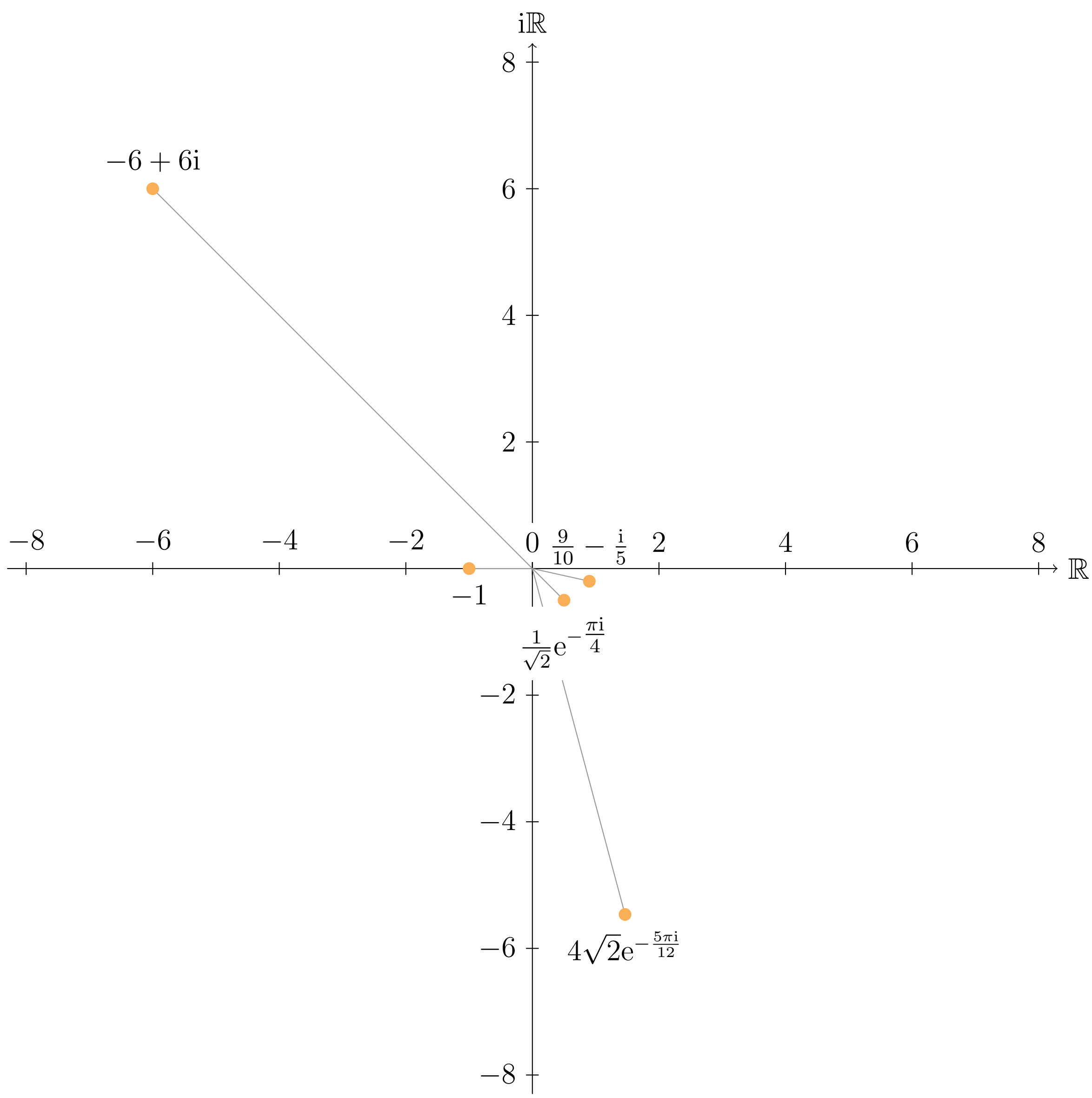
iii) Wir hatten bereits gesehen, dass $r = 2$ und $\phi = \arccos(1/2) = \pi/3$ für $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$. Damit gilt auch, dass $r = 2$ und $\phi = \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$ für $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. Somit erhalten wir

$$((1+\sqrt{3}\mathrm{i}) \div (\sqrt{3}+\mathrm{i}))^{18} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{6}}\right)^{18} = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}} = -1.$$

(1.1c) Skizzieren Sie Ihre Antworten aus den Teilaufgaben (1.1a) und (1.1b), sofern deren Betrag kleiner als 10 ist.

HINWEIS: Sie können die Skizze von Hand anfertigen oder aber Ihren Compurter zur Hilfe nehmen.

Lösung: Die Punkte sind im folgenden Bild eingetragen.



Aufgabe 1.2 Nullstellen Zeichnen

Zeichnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome in der komplexen Zahlenebene:

i) $z^2 + 25$,

ii) $z^2 - 2z + 2$,

iii) $z^3 + z^2 - 2$,

iv) $z^7 - 1$.

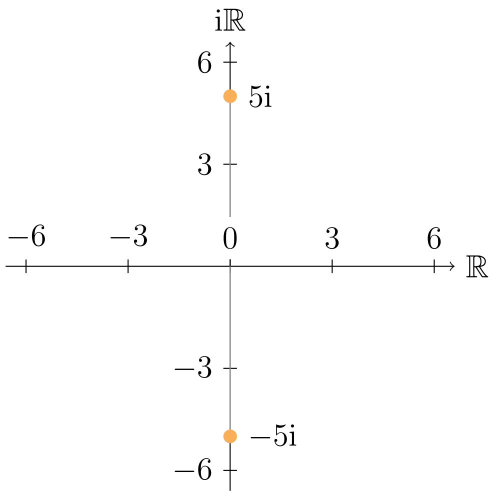
HINWEIS: Sie können die Skizzen von Hand anfertigen oder aber Ihren Compurter zur Hilfe nehmen.

Lösung:

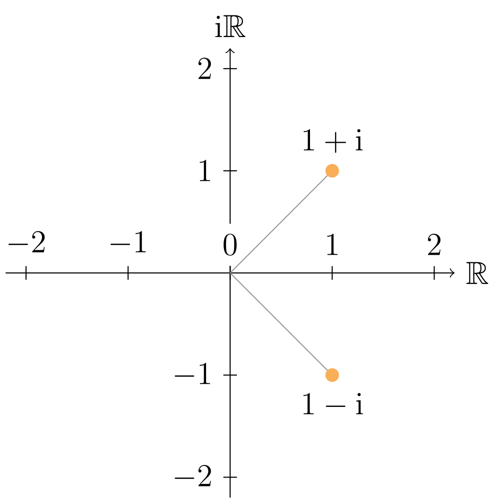
i) Wir sehen, dass

$$z^2 + 25 = (z - 5\mathrm{i})(z + 5\mathrm{i}).$$

Daher sind die Nullstellen $z_0 = 5\mathrm{i}$ und $z_1 = -5\mathrm{i}$.



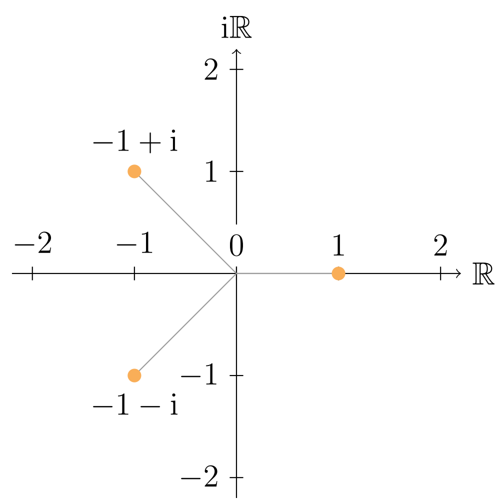
ii) Indem wir die Mitternachtsformel oder den Satz von Vieta anwenden erhalten wir $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ und $z_1 = 1 - \mathrm{i}$.



iii) Suchen wir die Nullstellen eines Polynomes dritten Grades so können wir damit beginnen eine Nullstelle zu eraten. In dieser Aufgabe eraten wir die Nullstelle $z_0 = 1$. Nun führen wir eine Polynomidivision durch, um den Grad des Polynomes zu verringern. Wir erhalten

$$(z^3 + z^2 - 2) \div (z - 1) = z^2 + 2z + 2.$$

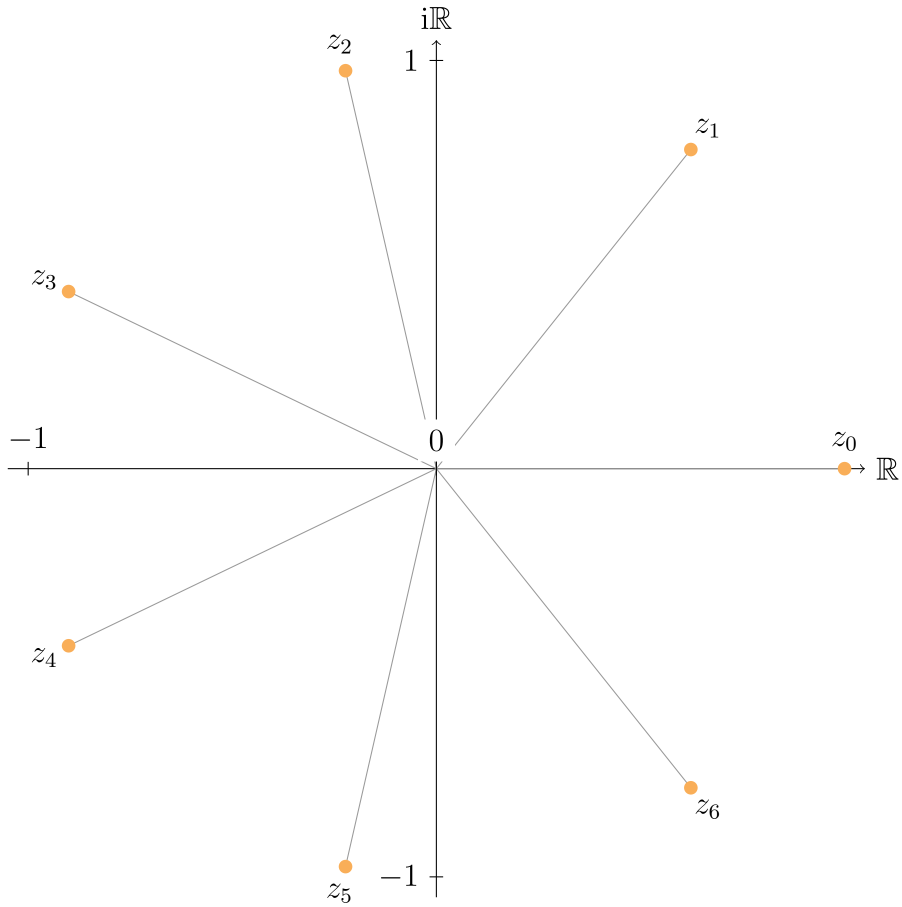
Zuletzt benutzen wir die Mitternachtsformel oder den Satz von Vieta und erhalten die weiteren Nullstellen $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ und $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.



iv) Die Nullstellen des Polynomes erfüllen die Gleichung $z^7 = 1$. Schreiben wir z in Polarform – also $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ – so erhalten wir

$$r^7 = 1 \quad \text{und} \quad 7\phi = 2\pi\mathbb{Z}.$$

Daraus folgt, dass die Nullstellen von $z^7 - 1$ gegeben sind durch $z_k = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{7}}$, wobei $k = 0, \dots, 6$. Wir nennen z_k die *siebten Einheitswurzeln*.



Aufgabe 1.3 Funktionen mit komplexem Definitionsbereich

(1.3a) Berechnen Sie die folgenden Terme in der algebraischen Form.

i) e^i,

ii) e^{1-2i},

iii) $\log(1+i)$,

iv) $\log(1+\sqrt{3}i)$.

Lösung:

i) Das Resultat ist e^i, will man es in Polarform angeben. In der algebraischen Form erhält man $\cos 1 + i \sin 1$. Dies entspricht näherungsweise

$$0.540 + 0.841i.$$

ii) In Polarform ist das Resultat gegeben durch $e \cdot e^{-2i}$. In der algebraischen Form erhält man $e \cos 2 - ei \sin 2$. Dies entspricht näherungsweise

$$-1.131 - 2.472i.$$

iii) Zuerst bemerken wir, dass $1+i$ umgerechnet in Polarform $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ ergibt. Wenden wir den Hauptzweig des Logarithmus an so erhalten wir

$$\operatorname{Log}(1+i) = \log\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} \approx 0.347 + 0.785i.$$

Will man die Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus betonen, so kann man auch

$$\log(1+\mathrm{i}) \in \left\{ \log\sqrt{2} + \frac{\pi\mathrm{i}}{4} + 2\pi\mathrm{i}k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

schreiben.

iv) In Polarform gilt $1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}$. Mit dem Hauptzweig des Logarithmus erhalten wir

$$\mathrm{Log}(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = \log 2 + \frac{\pi\mathrm{i}}{3} \approx 0.693 + 1.047\mathrm{i}.$$

Alternativ haben wir

$$\log(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) \in \left\{ \log 2 + \frac{\pi\mathrm{i}}{3} + 2\pi\mathrm{i}k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(1.3b) Berechnen Sie die folgenden Terme approximativ:

i) $\cos(10\mathrm{i})$,

ii) $\cos(-10\mathrm{i})$,

iii) $\sin(5+5\mathrm{i})$,

iv) $\sin(2-\mathrm{i})$.

Lösung:

i) Man kann hier die Formel

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

anwenden. Somit erhalten wir

$$\cos(10\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{-10} + \mathrm{e}^{10}}{2} = \frac{1+\mathrm{e}^{20}}{2\mathrm{e}^{10}} \approx 11\,013.233.$$

ii) Wir berechnen

$$\cos(-10\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{10} + \mathrm{e}^{-10}}{2} = \frac{1+\mathrm{e}^{20}}{2\mathrm{e}^{10}} \approx 11\,013.233.$$

Wir bemerken, dass der Kosinus entlang der komplexen Zahlenachse exponentiell steigt.

iii) Wir wenden die Formel

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

an. Damit erhalten wir

$$\sin(5+5\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{-5}\cdot\mathrm{e}^{5\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{5}\cdot\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} \approx -71.162 + 21.049\mathrm{i}.$$

iv) Wir berechnen

$$\sin(2-\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{2\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} \approx 1.403 + 0.489\mathrm{i}.$$

Aufgabe 1.4 Eine Komplexe Potenz

Berechnen Sie

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}.$$

Lösung: Mit dem Hauptzweig des Logarithmus erhalten wir

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot \operatorname{Log} \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.208.$$

Somit ist

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \left\{ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Aufgabe 1.5 Komplexe Grenzwerte und Reihen

(1.5a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim_{|n|\to\infty} \cos(\mathrm{i}n)$,

ii) $\lim_{n\to\infty} 1 + (-1)^n \frac{\mathrm{i}}{n}$,

iii) $\lim_{n\to\infty} (n + 2\pi\mathrm{i})^n / n^n$,

iv) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}(1 + (-1)^n \frac{\mathrm{i}}{n})$,

wobei in der letzten Teilaufgabe der Hauptwert des Arguments gemeint ist.

Lösung:

i) Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\cos(\mathrm{i}n) = \frac{\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{n}}{2} = \frac{1 + \mathrm{e}^{2n}}{2\mathrm{e}^{n}}.$$

Ist $-n \in \mathbb{N}$, so gilt ebenfalls

$$\cos(\mathrm{i}n) = \frac{\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{n}}{2} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-2n}}{2\mathrm{e}^{-n}}.$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{|n|\to\infty} \cos(\mathrm{i}n) = \infty.$$

ii) Wir berechnen

$$\lim_{n\to\infty} 1 + (-1)^n \tfrac{\mathrm{i}}{n} = 1.$$

iii) Es gilt, dass

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Daher folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} (n + 2\pi\mathrm{i})^n / n^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1.$$

iv) Der Hauptwert des Argumentes ist stetig auf $\left\{ z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \,\middle|\, r > 0,\ \phi \in (-\pi, \pi) \right\}$ und somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}\big(1 + (-1)^n \tfrac{\mathrm{i}}{n}\big) = \operatorname{Arg}(1) = 0.$$

(1.5b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{(\pi \mathrm{i})^n}{n!}.$$

Lösung: Wir teilen die Summe in ihre Einzelteile und berechnen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{(\pi \mathrm{i})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi \mathrm{i})^n}{n!} = 2 + \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} = 1,$$

wobei wir die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1,$$

und die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

benutzt haben.

Aufgabe 1.6 Herleitung der Additionstheoreme

(1.6a) Zeigen Sie, dass

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

gilt, für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Lösung: Wir definieren die Exponentialfunktion für komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Damit haben wir

$$\exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k},$$

wobei wir die binomische Formel angewandt haben. Tauschen wir die Summationsreihenfolge – die Summe ist absolut konvergent – so erhalten wir

$$\exp(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} z_1^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{z_2^{n-k}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Summieren wir die zweite Summe um, so erhalten wir sofort

$$\exp(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2).$$

(1.6b) Beweisen Sie die Additionstheoreme des Sinus und Kosinus. Zeigen Sie also, dass

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,\\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,\end{aligned}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung: Es gilt, dass

$$\sin x = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \qquad \cos x = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$

für $x \in \mathbb{R}$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x \pm y)} = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}y} = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}y} + \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}y}\\ &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) &= \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x \pm y)} = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}y} = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}y} - \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}y}\\ &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.\end{aligned}$$

Publiziert am 21. Februar.
Einzureichen am 28. Februar.