Komplexe Analysis D-ITET

Serie 10

Aufgabe 10.1 Einige Fourierintegrale

(10.1a) Berechnen Sie die Fouriertransformation in den folgenden zwei Fällen:

i. Sei $a > 0$ und

$$f(t) := \begin{cases} a - |t| & \text{für } |t| \leq a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii. Sei $a > 0$ und

$$f(t) := \mathrm{e}^{-a|t|}.$$

Lösung:

i. Wir setzen in die Definition der Fouriertransformation ein und haben

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} (a - |t|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = a \cdot \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t - \int_{-a}^{a} |t|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t.$$

Betrachten wir nun den ersten Summanden, so gilt

$$a \cdot \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{-\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\Big|_{-a}^{a} = \frac{2a}{s} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}as} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}as}}{2\mathrm{i}} = \frac{2a\sin(as)}{s},$$

für $s \neq 0$. Der zweite Summand wird durch ein Symmetrieargument berechnet. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} |t|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t &= 2 \cdot \int_{0}^{a} t\cos(st)\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{a} t\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right] = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{t}{\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\Big|_{0}^{a} - \frac{1}{\mathrm{i}s} \cdot \int_{0}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right] \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{a}{\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}as} + \frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\Big|_{0}^{a}\right] = \frac{2a\sin(as)}{s} + \frac{2\cos(as)}{s^2} - \frac{2}{s^2},\end{aligned}$$

für $s \neq 0$. Setzen wir diese beiden Resultate zusammen so haben wir

$$\widehat{f}(s) = \frac{2(1 - \cos(as))}{s^2},$$

für $s \neq 0$. Ist $s = 0$, so gilt

$$\widehat{f}(0) = \int_{-a}^{a} (a - |t|)\,\mathrm{d}t = a^2.$$

Bemerkung: Wir wollen das Symmetrieargument aus obiger Aufgabe noch einmal genau aufschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} |t| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st} \,\mathrm{d}t &= \int_0^a |t|(\cos(st) + \mathrm{i}\sin(st)) \,\mathrm{d}t + \int_{-a}^{0} |t|(\cos(st) + \mathrm{i}\sin(st)) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a |t|(\cos(st) + \mathrm{i}\sin(st)) \,\mathrm{d}t + \int_0^a |t|(\cos(-st) + \mathrm{i}\sin(-st)) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a |t|(\cos(st) + \mathrm{i}\sin(st)) \,\mathrm{d}t + \int_0^a |t|(\cos(st) - \mathrm{i}\sin(st)) \,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^a t\cos(st) \,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

wobei wir in Schritt zwei die Substitution $t \to -t$ verwendet haben.

ii. Diese Aufgabe gleicht einem Beispiel aus der Vorlesung sehr. Wir haben

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st} \,\mathrm{d}t.$$

Mit demselben Symmetrieargument wie eben, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(s) &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-at}\cos(st) \,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}s-a)t} \,\mathrm{d}t\right] = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{i}s - a}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}s-a)t}\right]_0^{\infty} \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{a - \mathrm{i}s}\right] = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{a + \mathrm{i}s}{a^2 + s^2}\right] = \frac{2a}{a^2 + s^2}.
\end{aligned}$$

(10.1b) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \mathrm{e}^{-\pi t^2}.$$

Benutzen Sie dazu den Satz von Cauchy und den Weg γ aus der Abbildung 10.1.

Hinweis: Sie müssen im Exponenten des Integranden quadratisch ergänzen.

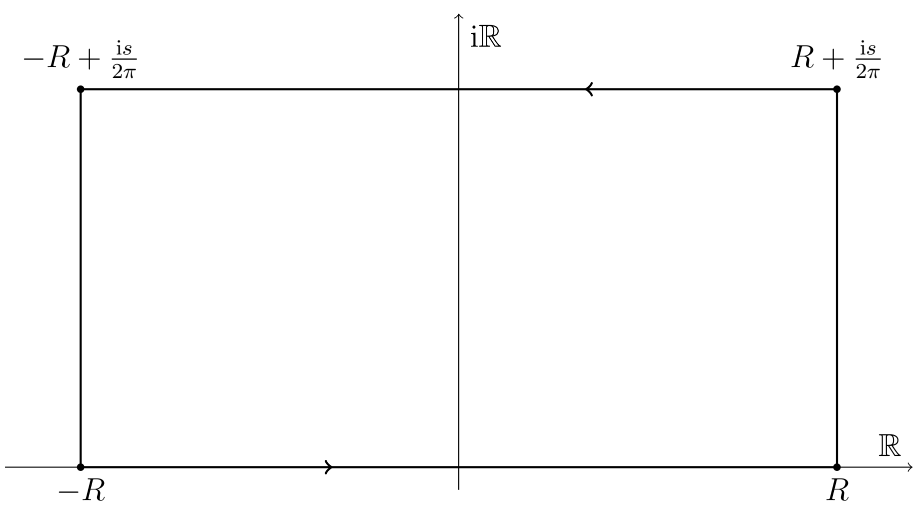

Abbildung 10.1: Der Weg γ.

Lösung: Wir beginnen damit in die Definition der Fouriertransformation einzusetzen. Es gilt

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2 - \mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t.$$

Wir haben nun durch quadratisches Ergänzen

$$\pi t^2 + \mathrm{i}st = \pi\left(t + \frac{\mathrm{i}s}{2\pi}\right)^2 + \frac{s^2}{4\pi}.$$

Also

$$\widehat{f}(s) = \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{4\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\left(t+\frac{\mathrm{i}s}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Nun können wir uns voll auf das Integral im obigen Ausdruck konzentrieren. Wir benutzen die Wegstücke

$$\gamma_0(t) := 2Rt - R, \qquad \gamma_1(t) := R + \frac{\mathrm{i}s}{2\pi}t,$$
$$\gamma_2(t) := -2Rt + R + \frac{\mathrm{i}s}{2\pi}, \qquad \gamma_3(t) := -R - \frac{\mathrm{i}s}{2\pi}t + \frac{\mathrm{i}s}{2\pi},$$

und den Weg $\gamma = \gamma_0 * \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$ aus Abbildung 10.1. Laut dem Satz von Cauchy und der Holomorphie von $f(z)$ gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \mathrm{e}^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{10.1.1}$$

Ausserdem haben wir

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \lim_{R\to\infty} \ell(\gamma_1)\cdot \max_{t\in[0,1]}|f(\gamma_1(t))| = \frac{s}{2\pi}\cdot \lim_{R\to\infty} \mathrm{e}^{-\pi R^2} = 0,$$

wobei $\ell(\gamma_1)$ die Länge des Wegstückes γ_1 beschreibt. Auf genau die gleiche Art und Weise zeigt man

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Es folgt nun aus (10.1.1), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\left(t+\frac{\mathrm{i}s}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\pi\left(t+\frac{\mathrm{i}s}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Also gilt

$$\widehat{f}(s) = \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{4\pi}}.$$

Bemerkung: Wir nutzen in dieser Rechnung die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

aus. Diese lässt sich ganz elegant durch einen Trick zeigen. Wir rechnen

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Nun transformieren wir in Polarkoordinaten und erhalten

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi r^2} r\,\mathrm{d}r.$$

Es bleibt die Substitution $s := \pi r^2$ zu verwenden. Wir haben damit

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s} r \frac{\mathrm{d}s}{2\pi r} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = 1.$$

(10.1c) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

erneut. Benutzen Sie diesesmal eine geeignete Substitution.

Lösung: Wie in der vorhergegangenen Aufgabe haben wir

$$\widehat{f}(s) = \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{4\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\left(t+\frac{\mathrm{i}s}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Wir substituieren $\tau := t + \frac{\mathrm{i}s}{2\pi}$ und erhalten damit

$$\widehat{f}(s) = \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{4\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\left(t+\frac{\mathrm{i}s}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{4\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\tau^2}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{4\pi}}.$$

Diese Rechnung ist also wesentlich kürzer als die obere mit dem Satz von Cauchy.

(10.1d) Benutzen Sie die Eigenschaften der Fouriertransformation, welche Sie aus der Vorlesung kennen, um die Fouriertransformation von

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

zu berechnen, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

Lösung: Hier verwenden wir die Eigenschaften

$$(f(t-a))\widehat{\ }(s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}as}\widehat{f}(s)$$

und

$$(f(at))\widehat{\ }(s) = \frac{1}{a} \cdot \widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right),$$

mit $a > 0$. Sei also $g(t) := \mathrm{e}^{-\pi t^2}$, dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot g\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right).$$

Wir wollen die obigen Eigenschaften Schritt für Schritt anwenden. Also sei $h(t) := g(\frac{t}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})$ damit

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot (h(t-\mu))\widehat{\ }(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu s}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \widehat{h}(s)$$

in einem ersten Schritt. Im zweiten Schritt rechnen wir

$$\widehat{f}(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu s}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \widehat{h}(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu s}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left(g\left(\frac{t}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\right)\widehat{\ }(s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu s}\widehat{g}\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}s\right).$$

Aus dem Resultat der vorhergegangenen Aufgaben, folgt schliesslich

$$\widehat{f}(s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu s}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}}.$$

Aufgabe 10.2 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung, welche die Ausbreitung einer Welle in einem Medium beschreibt. Sie ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{10.2.1}$$

wobei $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Typischerweise versehen wir die Wellengleichung mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10.2.2}$$

Die Anfangsbedingungen (10.2.2) kodieren, dass u zur Zeit $t = 0$ die Form f hat und in Ruhe ist.

(10.2a) Zeigen Sie, dass eine Lösung u der Wellengleichung (10.2.1) mit Anfangsbedingungen (10.2.2) die Eigenschaft hat, dass ihre Fouriertransformation

$$\widehat{u}(\xi,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(x,0) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

erfüllt.

Lösung: Hier brauchen wir nur die Eigenschaften der Fouriertransformation aus der Vorlesung anzuwenden. Definieren wir also $g_t(x) := u(x,t)$ und betrachten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \left(g_t^{(2)}\right)^{\widehat{}}(\xi) = -\xi^2\widehat{g_t}(\xi).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = -\xi^2\widehat{g_t}(\xi) = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t).$$

Auserdem gilt natürlich auch

$$\widehat{u}(\xi,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi)$$

und

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\widehat{u}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = 0.$$

(10.2b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe (10.2a), dass die Fouriertransformation von u gegeben ist durch

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cos(\xi t), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Lösung: Sei $h_\xi(t) := \widehat{u}(\xi,t)$. Dann gilt laut Aufgabe (10.2a)

$$h_\xi^{(2)}(t) + \xi^2 \cdot h_\xi(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$\lambda^2 + \xi^2 = 0$$

und hat somit die Nullstellen $\lambda_\pm = \pm \mathrm{i}\xi$. Es lassen sich also $a, b \in \mathbb{C}$ finden, sodass

$$h_\xi(t) = a\sin(\xi t) + b\cos(\xi t).$$

Setzen wir nun in die Anfangsbedingungen

$$h_\xi(0) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{und} \quad h'_\xi(0) = 0$$

ein, so erhalten wir

$$b = \widehat{f}(\xi) \quad \text{und} \quad a = 0.$$

Damit gilt also

$$\widehat{u}(\xi,t) = h_\xi(t) = \widehat{f}(\xi)\cos(\xi t).$$

(10.2c) Benutzen Sie die Eigenschaften der Fouriertransformation aus der Vorlesung zusammen mit einer Fouriertabelle, um zu schliessen, dass

$$u(x,t) = (f * \Gamma_t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Gamma_t(x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{10.2.3}$$

wobei

$$\Gamma_t(x) = \frac{\delta(x-t) + \delta(x+t)}{2}.$$

Hinweis: δ beschreibt die Delta Distribution, welche durch die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y)\,\mathrm{d}y = f(0)$$

definiert ist.

Lösung: Benutzen wir eine Fouriertabelle (mit der richtigen Normierung), so erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\delta(x-t) + \delta(x+t)}{2} = \Gamma_t(x).$$

Erinnern wir uns nun noch daran, dass

$$(f * \Gamma_t)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\Gamma}_t(\xi) = \widehat{f}(\xi)\cos(\xi t)$$

gilt, dann sehen wir sofort

$$u(x,t) = (f * \Gamma_t)(x)$$

aufgrund der Fourierinversion.

(10.2d) [*Bonus*] Aus (10.2.3) folgt

$$u(x,t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2}.$$

Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache (oder Stift und Papier), um u zu zeichnen für verschiedene $t > 0$ und

$$f(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2}.$$

Lösung: Wir benutzen folgendes Pythonmodul.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation

# generate time array to plot on
dt = 0.05
tt = np.arange(0, 8, dt)

# generate empty figure
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, autoscale_on=False, xlim=(-6, 6), ylim=(-0.3, 1.3))
ax.grid()

line, = ax.plot([], [], lw=2)
time_template = 'time = %.1fs'
time_text = ax.text(0.05, 0.9, '', transform=ax.transAxes)

# function for initial conditions of pde
def init_cond(x):

    return np.exp(- np.pi*x**2)

# function for initialisation of animation
def init():

    line.set_data([], [])
    time_text.set_text('')
    return line, time_text

# function for animation
def animate(i):

    x = np.linspace(-6, 6, 1000)
    y = (init_cond(x - i*dt) + init_cond(x + i*dt))/2
    line.set_data(x, y)
    time_text.set_text(time_template % (i*dt))

    return line, time_text

anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, np.arange(1, len(tt)),
                                interval=25, blit=True, init_func=init)
plt.show()
#anim.save('wave.gif', writer='imagemagick', fps=30)
```

Damit erhalten wir eine Animation unserer Lösung. Die resultierende Animation finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

Aufgabe 10.3 Einige Faltungsintegrale

Berechnen Sie die Faltung

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{R},$$

in den folgenden zwei Fällen:

i. Seien

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) := \begin{cases} t & \text{falls } 0 \le t < 1, \\ 1 & \text{falls } 1 \le t \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii. Seien

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung:

i. Da die Funktionen über eine Fallunterscheidung definiert sind, behandeln wir die Rechnung auch als Fallunterscheidung. Es macht dabei Sinn sich Bilder für die einzelnen Fälle auf ein Papier zu zeichnen.

[$t < 0$] Hier gilt

$$f(\tau)g(t-\tau) = 0, \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

und somit $(f * g)(t) = 0$.

[$0 \le t < 1$] Hier gilt

$$f(\tau)g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau < 0, \\ t-\tau & \text{falls } 0 \le \tau < t, \\ 0 & \text{falls } t \le \tau, \end{cases}$$

und deswegen $(f * g)(t) = \frac{t^2}{2}$.

[$1 \le t < 2$] Hier gilt

$$f(\tau)g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau < 0, \\ 1 & \text{falls } 0 \le \tau < t-1, \\ t-\tau & \text{falls } t-1 \le \tau < 1, \\ 0 & \text{falls} 1 \le \tau, \end{cases}$$

und deswegen $(f * g)(t) = 2t - 1 - \frac{t^2}{2}$.

[$2 \le t < 3$] Hier gilt

$$f(\tau)g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau < t-2, \\ 1 & \text{falls } t-2 \le \tau < 1, \\ 0 & \text{falls } 1 \le \tau, \end{cases}$$

und deswegen $(f * g)(t) = 3 - t$.

[$3 \le t$] Hier gilt

$$f(\tau)g(t-\tau) = 0, \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

und somit $(f * g)(t) = 0$.

Setzen wir nun alle Fälle zusammen, so haben wir

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ \frac{t^2}{2} & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ 2t - 1 - \frac{t^2}{2} & \text{falls } 1 \leq t < 2, \\ 3 - t & \text{falls } 2 \leq t < 3, \\ 0 & \text{falls } 3 \leq t. \end{cases}$$

ii. Wir betrachten erneut verschiedene Fälle.

$[t < 0]$ Hier gilt

$$f(\tau)g(t-\tau) = 0, \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

und somit $(f * g)(t) = 0$.

$[0 \leq t < 1]$ Hier gilt

$$f(\tau)g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau < 0, \\ \mathrm{e}^{\tau - t} & \text{falls } 0 \leq \tau < t, \\ 0 & \text{falls } t \leq \tau, \end{cases}$$

und somit $(f * g)(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$.

$[1 \leq t]$ Hier gilt

$$f(\tau)g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau < 0, \\ \mathrm{e}^{\tau - t} & \text{falls } 0 \leq \tau < 1, \\ 0 & \text{falls } t \leq \tau, \end{cases}$$

und somit $(f * g)(t) = \mathrm{e}^{1-t} - \mathrm{e}^{-t}$.

Setzen wir nun alle Fälle zusammen, so haben wir

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-t} & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ \mathrm{e}^{1-t} - \mathrm{e}^{-t} & \text{falls } 1 \leq t. \end{cases}$$

Aufgabe 10.4 Eigenschaften der Fouriertransformation

In dieser Aufgabe wollen wir einige Transformationen betrachten, welche aus einer früheren Übung bereits bekannt sein könnten. Sei dazu $a \in \mathbb{R}$ und definiere die Translation um a durch

$$\mathrm{T}_a f(t) := f(t-a), \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion ist. Definiere weiterhing die Modulation durch

$$\mathrm{M}_a f(t) := f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Im Folgenden sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f * g$ absolut integrierbare Funktionen

(10.4a) Zeigen Sie, dass
$$(\mathrm{T}_a f)\widehat{\ }(s) = \mathrm{M}_{-a}\widehat{f}(s)$$
gilt.

Lösung: Wir setzen direkt in die Definition der Fouriertransformation ein und erhalten

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}_a f)\widehat{\ }(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{T}_a f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(\tau+a)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}as}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}as}\cdot\widehat{f}(s) = \mathrm{M}_{-a}\widehat{f}(s),\end{aligned}$$

mit der Substitution $t = \tau + a$.

(10.4b) Zeigen Sie, dass
$$(\mathrm{M}_a f)\widehat{\ }(s) = \mathrm{T}_a\widehat{f}(s)$$
gilt.

Lösung: Wir setzen direkt in die Definition der Fouriertransformation ein und erhalten

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}_a f)\widehat{\ }(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}_a f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s-a)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \widehat{f}(s-a) = \mathrm{T}_a\widehat{f}(s).\end{aligned}$$

(10.4c) Zeigen Sie, dass
$$(f*g)\widehat{\ }(s) = \widehat{f}(s)\cdot\widehat{g}(s),$$
gilt.

Lösung: Mit der Definition der Faltung und der Fouriertransformation haben wir

$$(f*g)\widehat{\ }(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t.$$

Vertauschen wir nun die Reihenfolge der Integration (wenn $f*g$ absolut integrabel ist, so ist dies möglich), dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(f*g)\widehat{\ }(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\tau}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\tau}\cdot\widehat{g}(s)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \widehat{f}(s)\cdot\widehat{g}(s).\end{aligned}$$

Publiziert am 09. Mai.

Einzureichen am 16. Mai.