Komplexe Analysis D-ITET

Serie 11

Aufgabe 11.1 Eine Anwendung des Satzes von Plancherel

(11.1a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 1 - t^2 & \text{wenn } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und berechnen Sie ihre Fouriertransformation.

Lösung: Beginnen wir mit f. Wir haben

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t.$$

Wir beginnen damit das erste Integral auf der rechten Seite zu berechnen. Es gilt

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ts} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}}{\mathrm{i}s} = \frac{2\sin(s)}{s}.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite berechnet sich durch zweifaches Anwenden von partieller Integration. Wir haben zuerst

$$\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{-\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{2}{\mathrm{i}s} \cdot \int_{-1}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sin(s)}{s} + \frac{2}{\mathrm{i}s} \cdot \int_{-1}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t.$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t &= \frac{t}{-\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{\mathrm{i}s} \cdot \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{s} + \frac{2\sin(s)}{\mathrm{i}s^2} \\ &= \frac{2\mathrm{i}}{s} \cdot \left(\cos(s) - \frac{\sin(s)}{s}\right). \end{aligned}$$

Wir setzen dies in unsere obige Rechnung ein und erhalten

$$\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sin(s)}{s} + \frac{4}{s^2} \cdot \left(\cos(s) - \frac{\sin(s)}{s}\right).$$

Damit gilt

$$\widehat{f}(s) = \frac{4}{s^2} \cdot \left(\frac{\sin(s)}{s} - \cos(s)\right).$$

(11.1b) Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe (11.1a) den Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{(\sin(s) - s\cos(s))^2}{s^6}\,\mathrm{d}s.$$

Lösung: Laut dem Satz von Plancherel gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(s)\right|^2\mathrm{d}s.$$

Also ist

$$\frac{8}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sin(s) - s\cos(s))^2}{s^6}\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t.$$

Da der Integrand zur Linken gerade ist, gilt

$$\int_0^\infty \frac{(\sin(s) - s\cos(s))^2}{s^6}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{16}\cdot\int_{-1}^{1} 1 - 2t^2 + t^4\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{40} = \frac{8\pi}{120} = \frac{\pi}{15}.$$

(11.1c) [*Bonus*] Können Sie ein anderes Integral auf diese Art und Weise berechnen?

Hinweis: Achtung! Beim Kreeieren von eigenen Beispielen muss man immer darauf achten, dass die Integrale auch wirklich konvergieren.

Lösung: Es gibt hier natürlich viele Möglichkeiten, um Integrale zu berechnen. Betrachten wir zum Beispiel

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t\in[-a,a],\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

mit $a > 0$, so erhalten wir

$$\widehat{f}(s) = \frac{2\sin(as)}{s}.$$

Mit dem Satz von Plancherel lässt sich dann zeigen, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(as)}{s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{4}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi a}{2}.$$

Aufgabe 11.2 Das Riemann–Lebesgue Lemma

Ziel dieser Aufgabe ist es das Riemann–Lebesgue Lemma zu beweisen:

Sei f absolut integrabel, also

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{|s|\to\infty}\widehat{f}(s) = 0.$$

(11.2a) Beginnen Sie damit zu zeigen, dass wenn f absolut integrabel ist,

$$\left|\widehat{f}(s)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}t$$

gilt, für beliebige $s \in \mathbb{R}$.

Lösung: Dies kann man direkt nachrechnen. Es gilt

$$\left|\widehat{f}(s)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts} \,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}t,$$

dank der Dreiecksungleichung. Da das rechte Integral unabhängig von s ist, folgt die Aussage.

(11.2b) Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\chi_{[a,b]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und berechnen Sie ihre Fouriertransformation. Zeigen Sie dann, dass

$$\lim_{|s|\to\infty} \widehat{\chi_{[a,b]}}(s) = 0.$$

Lösung: Die Fouriertransformation von $\chi_{[a,b]}$ berechnet sich durch

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts} \,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{-\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\Big|_{a}^{b} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}as} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}}{\mathrm{i}s}.$$

Damit gilt

$$\lim_{|s|\to\infty} \left|\widehat{\chi_{[a,b]}}(s)\right| = \lim_{|s|\to\infty} \frac{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}as} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}\right|}{|s|} \leq \lim_{|s|\to\infty} \frac{2}{|s|} = 0$$

und die Aussage folgt.

(11.2c) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $a_j < b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$. Seien desweiteren $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, N$, und betrachten Sie die Funktion

$$g(t) := \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{[a_j,b_j]}(t). \tag{11.2.1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe (11.2b), dass

$$\lim_{|s|\to\infty} \widehat{g}(s) = 0.$$

Lösung: Dies folgt direkt aus einer Anwendung der Dreiecksungleichung zusammen mit der Linearität der Fouriertransformation. Wir haben nämlich

$$\lim_{|s|\to\infty} |\widehat{g}(s)| = \lim_{|s|\to\infty} \left|\sum_{j=1}^{N} c_j \widehat{\chi_{[a_j,b_j]}}(s)\right| \leq \lim_{|s|\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |c_j| \left|\widehat{\chi_{[a_j,b_j]}}(s)\right| = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt Aufgabe (11.2b) angewandt haben. Damit folgt die Aussage.

(11.2d) Sei nun f absolut integrierbar. Dann kann man zeigen (dies ist allerdings nicht Teil dieser Aufgabe), dass es eine Funktionenfolge $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gibt, in welcher alle g_n von der Form (11.2.1) sind und welche

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g_n(t)| \,\mathrm{d}t = 0 \tag{11.2.2}$$

erfüllt. Benutzen Sie dies und die Aufgaben (11.2a) und (11.2c), um

$$\lim_{|s|\to\infty} \widehat{f}(s) = 0$$

zu folgern.

Lösung: Sei g_n die Funktionenfolge, welche in der Aufgabenstellung beschrieben ist. Dann gilt

$$\left|\widehat{f}(s)\right| = \left|\widehat{f}(s) + \widehat{g_n}(s) - \widehat{g_n}(s)\right| \leq |\widehat{g_n}(s)| + \left|\widehat{f}(s) - \widehat{g_n}(s)\right|,$$

dank der Dreiecksungleichung. Laut der Linearität der Fouriertransformation und der Aufgabe (11.2a), folgt aber auch

$$\left|\widehat{f}(s)\right| \leq |\widehat{g_n}(s)| + |(f - g_n)\widehat{\ }(s)| \leq |\widehat{g_n}(s)| + \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g_n(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Die Aussage folgt nun nachdem wir $|s|$ und n gegen unendlich gehen lassen. Mathematisch wird dies durch ein ϵ-Argument untermauert. Sei $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g_n(t)| \,\mathrm{d}t < \frac{\epsilon}{2}$$

gilt, laut (11.2.2). Ausserdem gibt es ein $R > 0$, sodass für alle $|s| > R$

$$|\widehat{g_{n_0}}(s)| < \frac{\epsilon}{2}$$

gilt, laut Aufgabe (11.2c). Alles in allem haben wir damit

$$\left|\widehat{f}(s)\right| \leq |\widehat{g_{n_0}}(s)| + \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g_{n_0}(t)| \,\mathrm{d}t < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

und die Aussage folgt.

Bemerkung: Beachten Sie, dass wir gezeigt haben, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert, sodass für alle $|s| \geq R$

$$\left|\widehat{f}(s)\right| < \epsilon$$

gilt. Dies entspricht genau dem ϵ-Kriterium für unseren Grenzwert.

Aufgabe 11.3 Laplacetransformationen Berechnen - I

Entscheiden Sie bei den folgenden Funktionen, ob die Laplacetransformation existiert. Existiert die Transformation, so berechnen Sie sie. Existiert die Transformation nicht, so erklären Sie warum.

i. $\log(t)$

ii. e^{3t}

iii. e^{t^2}

iv. $e^{1/t}$

v. $1/t$

Hinweis: In einer der Aufgabe wird die Euler–Mascheroni Konstante

$$\gamma := -\int_0^\infty e^{-x}\log(x)\,dx$$

auftauchen.

Lösung:

i. Die Laplacetransformation von $f(t) := \log(t)$ existiert. Wir berechnen

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty \log(t)e^{-st}\,dt, \qquad \operatorname{Re} s > 0,$$

durch die Substitution $\tau = st$ und erhalten

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}\cdot\int_0^\infty \log\Big(\frac{\tau}{s}\Big)e^{-\tau}\,d\tau = \frac{1}{s}\cdot\bigg(\int_0^\infty \log(\tau)e^{-\tau}\,d\tau - \log(s)\cdot\int_0^\infty e^{-\tau}\,d\tau\bigg).$$

Wir erkennen die Euler–Mascheroni Konstante aus dem Hinweis und haben deswegen

$$\mathcal{L}[f](s) = -\frac{1}{s}\cdot(\log(s)+\gamma).$$

ii. Die Laplacetransformation von $f(t) := e^{3t}$ existiert für $\operatorname{Re} s > 3$ und wir berechnen

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty e^{3t}e^{-st}\,dt = \frac{1}{3-s}e^{(3-s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-3}.$$

iii. Die Laplacetransformation von e^{t^2} existiert nicht, da e^{t^2} schneller als exponentiell wächst und somit das Integral

$$\int_0^\infty e^{t^2}e^{-st}\,dt$$

für kein $s \in \mathbb{C}$ konvergiert.

iv. Die Laplacetransformation von $e^{1/t}$ existiert nicht, da $e^{1/t}$ wenn t gegen Null tendiert exponentiell wächst. Damit existiert das Integral

$$\int_0^\infty e^{1/t}e^{-st}\,dt$$

für kein $s \in \mathbb{C}$.

v. Die Laplacetransformation von $1/t$ existiert nicht, da $1/t$ in der Nähe von Null nicht von oben beschränkt ist. Damit konvergiert das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{t}e^{-st}\,dt$$

für kein $s \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 11.4 Laplacetransformationen Berechnen - II

(11.4a) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen.

i. $e^{\alpha t}$ ii. t^2 iii. $\cosh(t)$

Lösung:

i. Wir berechnen direkt

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}](s) = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}\,dt = \frac{1}{s-\alpha},$$

für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$.

ii. Mittels partieller Integration berechnen wir

$$\mathcal{L}[t^2](s) = \int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt = \frac{t^2}{-s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{2}{s}\cdot\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \frac{2}{s}\cdot\int_0^\infty te^{-st}\,dt,$$

für $\operatorname{Re} s > 0$. Wenden wir nun erneut partielle Integration an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^2](s) &= \frac{2}{s}\cdot\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \frac{2}{s}\cdot\left(\frac{t}{-s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\cdot\int_0^\infty e^{-st}\,dt\right) = \frac{2}{s^2}\cdot\int_0^\infty e^{-st}\,dt \\ &= \frac{2}{s^3}.\end{aligned}$$

iii. Wir benutzen

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

die Linearität der Laplacetransformation und Punkt i., um

$$\mathcal{L}[\cosh(t)](s) = \frac{1}{2}\cdot\big(\mathcal{L}[e^t](s) - \mathcal{L}[e^{-t}](s)\big) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{s}{s^2-1}$$

zu berechnen, für $\operatorname{Re} s > 1$.

(11.4b) Berechnen Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen.

i. t^2e^{-3t} ii. $4t + 6e^{4t}$ iii. $e^{-4t}\sin(5t)$

Lösung:

i. Wir berechnen

$$\mathcal{L}[t^2e^{-3t}](s) = \int_0^\infty t^2e^{-3t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty t^2e^{-(s+3)t}\,dt = \mathcal{L}[t^2](s+3) = \frac{2}{(s+3)^3},$$

für $\operatorname{Re} s > -3$, unter Zuhilfenahme von Aufgabe (11.4a).

ii. Hier benutzen wir die Linearität der Laplacetransformation. Zuerst berechnen wir

$$\mathcal{L}[t](s) = \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \frac{t}{-s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\cdot\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\cdot\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}.$$

Dann benutzen wir Aufgabe (11.4a), um

$$\mathcal{L}[4t + 6e^{4t}](s) = 4\cdot\mathcal{L}[t](s) + 6\cdot\mathcal{L}[e^{4t}](s) = \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s-4},$$

für $\operatorname{Re} s > 4$, zu zeigen.

iii. Wir rechnen

$$\mathrm{e}^{-4t}\sin(5t) = \mathrm{e}^{-4t} \cdot \frac{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{(5\mathrm{i}-4)t} - \mathrm{e}^{-(5\mathrm{i}+4)t}}{2\mathrm{i}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-4t}\sin(5t)](s) &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \big(\mathcal{L}[\mathrm{e}^{(5\mathrm{i}-4)t}](s) - \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-(5\mathrm{i}+4)t}](s)\big) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \left(\frac{1}{s+4-5\mathrm{i}} - \frac{1}{s+4+5\mathrm{i}}\right) = \frac{5}{s^2+8s+41},\end{aligned}$$

für $\operatorname{Re} s > -4$.

Publiziert am 16. Mai.

Einzureichen am 23. Mai.