Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 12

Aufgabe 12.1 Laplacetransformationen Berechnen - III

Finden Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen:

i.
$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 \le t < 6, \\ 3 & \text{wenn } 6 \le t. \end{cases}$$

ii.
$$f(t) := \begin{cases} 3 & \text{wenn } 0 \le t < 5, \\ 10 & \text{wenn } 5 \le t < 8, \\ 0 & \text{wenn } 8 \le t. \end{cases}$$

iii.
$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 \le t < 3, \\ 6\sin(t-3) & \text{wenn } 3 \le t. \end{cases}$$

iv.
$$f(t) := \begin{cases} 4 & \text{wenn } 0 \le t < 2, \\ 4 + 5(t-2)\mathrm{e}^{t-2} & \text{wenn } 2 \le t. \end{cases}$$

Lösung:

i. Bei dieser Funktion können wir einfach direkt in die Definition der Laplacetransformation einsetzen. Wir erhalten

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = 3 \cdot \int_6^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{3\mathrm{e}^{-6s}}{s},$$

wenn $\operatorname{Re} s > 0$.

ii. Auch hier braucht man nur in die Definition einzusetzen und erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = 3 \cdot \int_0^5 \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + 10 \cdot \int_5^8 \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3(1-\mathrm{e}^{-5s})}{s} + \frac{10(\mathrm{e}^{-5s}-\mathrm{e}^{-8s})}{s} = \frac{3 + 7\mathrm{e}^{-5s} - 10\mathrm{e}^{-8s}}{s}, \end{aligned}$$

wenn $\operatorname{Re} s > 0$.

iii. Hier macht es Sinn erst einmal die Laplacetransformation des Sinus auszurechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin](s) &= \int_0^\infty \sin(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-s)t}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}+s)t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}}-\frac{1}{s+\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{s^2+1},\end{aligned}$$

wenn $\operatorname{Re} s > 0$. Nun brauchen wir nur noch die Substitution $\tau = t-3$ anzuwenden, um

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = 6\cdot\int_3^\infty \sin(t-3)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = 6\cdot\int_0^\infty \sin(\tau)\mathrm{e}^{-s(\tau+3)}\,\mathrm{d}\tau\\ &= 6\mathrm{e}^{-3s}\cdot\mathcal{L}[\sin](s) = \frac{6\mathrm{e}^{-3s}}{s^2+1}\end{aligned}$$

zu sehen.

iv. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= 4\cdot\int_0^2 \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + 4\cdot\int_2^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + 5\cdot\int_2^\infty (t-2)\mathrm{e}^{t-2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= 4\cdot\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + 5\cdot\int_0^\infty \tau\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{e}^{-s(\tau+2)}\,\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{4}{s} + 5\mathrm{e}^{-2s}\mathcal{L}[t\mathrm{e}^t](s),\end{aligned}$$

wobei wir die Transformation $\tau = t-2$ verwendet haben. In der letzten Übung hatten wir die Laplacetransformation der Exponentialfunktion berechnet. Wenden wir dies nun an, zusammen mit dem Multiplikationssatz aus der Vorlesung, so haben wir

$$\mathcal{L}[t\mathrm{e}^t](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\mathcal{L}[\mathrm{e}^t](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2},$$

wenn $\operatorname{Re} s > 1$. Setzen wir dies in die obige Rechnung ein, dann erhalten wir

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{4}{s} + \frac{5\mathrm{e}^{-2s}}{(s-1)^2}.$$

Aufgabe 12.2 Laplacerücktransformation und Faltung

(12.2a) Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{1}{s^2(s^2+a^2)}.$$

Benutzen Sie dazu eine Partialbruchzerlegung.

Lösung: Für die Partialbruchzerlegung benutzen wir den Ansatz

$$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s^2+a^2}.$$

Man sieht dann entweder durch genügend langes Hinsehen oder durch Ausrechnen von A und B aus dem Gleichungssystem

$$A + B = 0, \qquad a^2 \cdot A = 1,$$

dass

$$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+a^2} \right).$$

Dank der Linearität der Laplacetransformation und dem Satz von Lerch (Eindeutigkeit der inversen Laplacetransformation) gilt also

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[f](t) &= \frac{1}{a^2} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right](t) \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) - \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right](t) \right). \end{aligned}$$

Nun ist der Punkt gekommen an dem es Sinn macht eine gute Laplacetransformationstabelle zu benutzen. Wir sehen dann nämlich, dass

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right](t) = \sin(at).$$

Setzen wir dies oben in unsere Rechnung ein so erhalten wir

$$\mathcal{L}^{-1}[f](t) = \frac{1}{a^2} \cdot \left(t - \frac{\sin(at)}{a} \right).$$

(12.2b) Bestimmen Sie erneut die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{1}{s^2(s^2+a^2)}.$$

Benutzen Sie diesesmal den Faltungssatz aus der Vorlesung.

Lösung: Um den Faltungssatz anzuwenden, teilen wir unsere Funktion nicht in eine Summe auf, sondern in eine Multiplikation. Wir haben

$$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{a}{s^2+a^2}.$$

In Aufgabe (12.2a) hatten wir gesehen, dass

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right](t) = \sin(at)$$

gilt. Sind $f_0(t) = t$ und $f_1(t) = \sin(at)$ die beiden obigen Originalfunktionen, so gilt laut dem Faltungssatz, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[f](t) &= \frac{1}{a} \cdot (f_0 * f_1)(t) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^t (t-\tau)\sin(a\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{t}{a} - \frac{t\cos(at)}{a} - \int_0^t \tau \sin(a\tau)\,\mathrm{d}\tau \right). \end{aligned}$$

Für das zweite Integral benutzen wir partielle Integration und sehen

$$\int_0^t \tau \sin(a\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{\tau}{a}\cos(a\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{a}\cdot\int_0^t \cos(a\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{t\cos(at)}{a} + \frac{1}{a^2}\sin(at).$$

Setzen wir dies in die obige Rechnung ein, so folgt

$$\mathcal{L}^{-1}[f](t) = \frac{1}{a^2}\cdot\left(t - \frac{\sin(at)}{a}\right)$$

(12.2c) Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{-2s^2+18s-3}{s^3-s^2-8s+12}$$

durch eine Methode Ihrer Wahl.

Lösung: Wir wollen hier die Variante mit der Partialbruchzerlegung zeigen. Man kann allerdings auch den Faltungssatz anwenden. Auf beiden Wegen beginnt man damit eine Nullstelle des Nenners zu erraten. Wir erraten $s_0 = 2$ und benutzen eine Polynomidivision, um den Nenner zu faktorisieren. Damit erhalten wir

$$\begin{array}{rl}
s^3 \;\; - s^2 - 8s + 12 & = \big(s-2\big)\big(s^2+s-6\big). \\
\underline{-\, s^3 + 2s^2} \qquad\qquad & \\
s^2 - 8s \qquad & \\
\underline{-\, s^2 + 2s} \qquad & \\
-\, 6s + 12 & \\
\underline{6s - 12} & \\
0 &
\end{array}$$

Laut dem Satz von Vieta gilt ausserdem

$$s^2+s-6 = (s-2)(s+3)$$

und somit lässt sich der Nenner zu

$$s^3-s^2-8s+12 = (s-2)^2(s+3)$$

zerlegen. Wir machen nun den Ansatz

$$\frac{-2s^2+18s-3}{s^3-s^2-8s+12} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s+3}$$

für die Polynomidivision. Damit ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$A + C = -2, \qquad A + B - 4C = 18, \qquad -6A + 3B + 4C = -3.$$

Löst man dieses System, so erhält man $A = 1$, $B = 5$ und $C = -3$, sodass

$$\frac{-2s^2+18s-3}{s^3-s^2-8s+12} = \frac{1}{s-2} + \frac{5}{(s-2)^2} - \frac{3}{s+3}$$

gilt. Mit einer guten Laplacetabelle sieht man nun, dass

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) = \mathrm{e}^{2t}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right](t) = t\mathrm{e}^{2t}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right](t) = \mathrm{e}^{-3t}.$$

Mit der Partialbruchzerlegung, welche wir oben berechnet haben, dem Satz von Lerch und der Linearität der Laplacetransformation folgt nun

$$\mathcal{L}^{-1}[f](t) = \mathrm{e}^{2t} + 5t\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{-3t}.$$

Aufgabe 12.3 Satz von Bromwich und Residuensatz

Sei $\mathcal{L}[f]$ die Laplacetransformation einer Originalfunktion f. Liegen alle Singularitäten von $\mathcal{L}[f]$ zur Linken des Weges $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \lambda + \mathrm{i}t$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt laut dem *Satz von Bromwich*, dass

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_\gamma \mathcal{L}[f](s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s, \qquad t > 0.$$

(12.3a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Benutzen Sie den Satz von Bromwich und den Residuensatz angewandt auf den Weg γ_R in Abbildung 12.1, um zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-n}](t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

gilt.

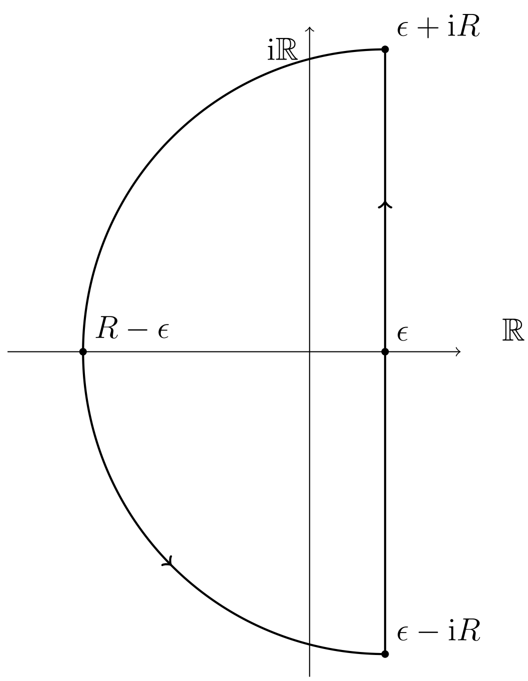

Abbildung 12.1: Der Weg γ_R für Aufgabe (12.3a).

Lösung: Der Weg γ_R lässt sich in die zwei Teile $\gamma_R^{(0)} : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R^{(0)}(t) = \epsilon + \mathrm{i}t$, und $\gamma_R^{(1)} : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R^{(1)}(t) = \epsilon + \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}$, zerlegen. Laut dem Satz von Bromwich gilt dann

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\gamma_R^{(0)}} s^{-n}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = \mathcal{L}^{-1}[s^{-n}](t).$$

Ausserdem können wir abschätzen

$$\left| \int_{\gamma_R^{(1)}} s^{-n}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \right| \leq \pi R \cdot \max_{t\in[0,1]} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\gamma(t)t}}{|\gamma(t)|^n} \leq \pi R \cdot \frac{\mathrm{e}^{\epsilon}}{(R-\epsilon)^n}.$$

Da $n \geq 2$ ist, folgt, dass der obige Term gegen null konvergiert, wenn R gegen unendlich tendiert. Also folgt, dass

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-n}](t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\gamma_R} s^{-n}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s.$$

Letzteres Integral berechnen wir mit dem Residuensatz. Die einzige Singularität des Integranden, welche durch γ_R eingeschlossen wird, liegt an $s_0 = 0$. Wir berechnen

$$s^{-n}\mathrm{e}^{st} = \frac{1}{s^n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(st)^k}{k!} = \cdots + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{s} + \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

Damit gilt

$$\mathrm{Res}\big(s^{-n}\mathrm{e}^{st}, 0\big) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

und deswegen

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-n}](t) = \mathrm{Res}\big(s^{-n}\mathrm{e}^{st}, 0\big) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

laut dem Residuensatz.

(12.3b) [*Bonus*] Benutzen Sie den Satz von Bromwich und den Satz von Cauchy angewandt auf den Weg γ_R in Abbildung 12.2, um zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right](t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

gilt.

Hinweis: Das Integral über γ_R muss in ein Integral über sechs Teilstücke aufgetrennt werden. Man kann zeigen, dass drei dieser Integrale verschwinden, wenn man geeignete Grenzwerte bildet. Für die beiden Integrale über die Kreissektoren mit Radius R, lässt man R gegen unendlich gehen und benutzt die bekannte Abschätzung $\sin(\pi t) \geq 2t$, $t \in [0, 1/2]$. Für das Integral über den Kreissektor mit Radius ϵ, lässt man ϵ gegen Null gehen. Die restlichen Integrale verschwinden nicht. Beachten Sie jedoch die Unstetigkeit der komplexen Wurzelfunktion auf der Achse $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Wir arbeiten hier mit dem Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion.

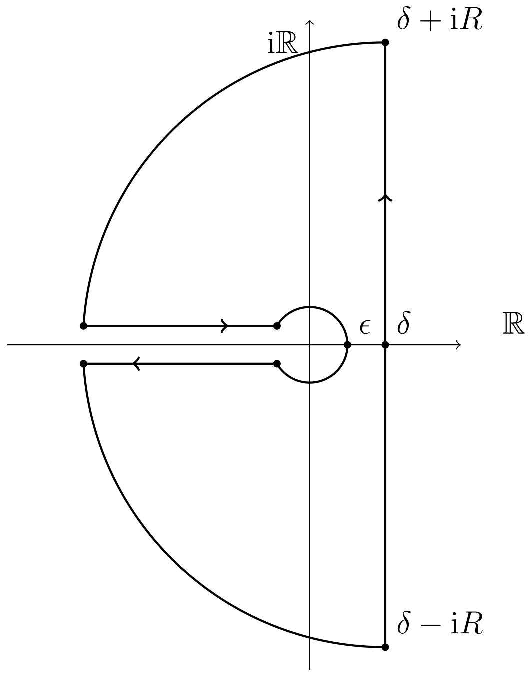

Abbildung 12.2: Der Weg γ_R für Aufgabe (12.3b).

Lösung: Wie in der Aufgabe bevor lässt sich der Weg γ_R aufteilen. Hier brauchen wir nun allerdings sechs Teilstücke. Das erste Stück wird durch $\gamma_R^{(0)} : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R^{(0)}(t) = \delta + \mathrm{i}t$, parametrisiert und erfüllt laut dem Satz von Bromwich

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{1}{\sqrt{s}} \mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right](t).$$

Zwei weitere Teilstücke sind gegeben durch $\gamma_R^{(1)} : [0, t_{\max}^{(1)}] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R^{(1)}(t) = \delta - R(\sin(\pi t) - \mathrm{i}\cos(\pi t))$, und $\gamma_R^{(5)} : [t_{\min}^{(5)}, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R^{(5)}(t) = \delta - R(\sin(\pi t) - \mathrm{i}\cos(\pi t))$, mit $t_{\max}^{(1)} \in (0, 1/2)$ und $t_{\min}^{(5)} \in (1/2, 1)$. Die Integrale über diese beiden Wege werden verschwinden. Man muss dafür allerdings relativ vorsichtig argumentieren. Wir betrachten nur $\gamma_R^{(1)}$, da die Rechnung für $\gamma_R^{(5)}$ analog verläuft. Wir haben

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\right| &\le \int_0^{t_{\max}^{(1)}} \frac{1}{\sqrt{\left|\gamma_R^{(1)}(t)\right|}} \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\gamma_R^{(1)}(t)t}\left|\dot{\gamma}_R^{(1)}(t)\right|\mathrm{d}t \le \frac{\pi R}{\sqrt{R-\delta}} \cdot \int_0^{t_{\max}^{(1)}} \mathrm{e}^{\delta t - Rt\sin(\pi t)}\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\pi R}{\sqrt{R-\delta}} \cdot \int_0^{t_{\max}^{(1)}} \mathrm{e}^{\delta t - 2Rt}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R}{\sqrt{R-\delta}} \cdot \frac{1}{\delta - 2R}\Big(\mathrm{e}^{\delta t_{\max}^{(1)} - 2R t_{\max}^{(1)}} - 1\Big),\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt die bekannte Ungleichung $\sin(\pi t) \ge 2t$, $t \in [0, 1/2]$, angewandt haben. Wenn R gegen unendlich tendiert, so konvergiert der letzte Term in der obigen Rechnung gegen Null. Damit verschwinden also die Integrale über $\gamma_R^{(1)}$ und $\gamma_R^{(5)}$. Wir betrachten als nächstes das Integral über das Wegstück $\gamma_R^{(3)} : [t_{\min}^{(3)}, t_{\max}^{(3)}] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R^{(3)}(t) = \epsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t}$, mit $t_{\min}^{(3)} \in (-1, -1/2)$

und $t_{\max}^{(3)} \in (1/2, 1)$. Es gilt

$$\left| \int_{\gamma_R^{(3)}} \frac{1}{\sqrt{s}} \mathrm{e}^{st} \, \mathrm{d}s \right| \leq 2\epsilon\pi \cdot \max_{t \in [t_{\min}^{(3)}, t_{\max}^{(3)}]} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{Re} \gamma_R^{(3)}(t) t}}{\sqrt{\left| \gamma_R^{(3)}(t) \right|}} \leq \frac{2\epsilon\pi \mathrm{e}^{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Letzterer Term konvergiert gegen Null, wenn ϵ gegen Null tendiert. Als letztes betrachten wir die Integrale über die beiden geraden Wegstücke in der linken Halbebene. Wenn ϵ gegen Null und R gegen unendlich geht, so geht das Integral in der oberen Halbebene gegen

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}} \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}s &= 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{r} \mathrm{e}^{-r^2 t} r \, \mathrm{d}r = -2\mathrm{i} \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2 t} \, \mathrm{d}r = -\mathrm{i} \cdot \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-r^2 t} \, \mathrm{d}r \\ &= -\mathrm{i} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\pi u^2} \, \mathrm{d}u = -\mathrm{i} \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt die Substitution $s = r^2$ benutzt haben und im vierten Schritt die Substitution $r = \sqrt{\pi/t} \cdot r$ verwenden. Beachten Sie auch, dass wir $\lim_{\epsilon \to 0^+} \sqrt{-s + \mathrm{i}\epsilon} = \sqrt{s} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, für $s > 0$, verwendet haben. Das Integral in der unteren Halbebene tendiert gegen

$$-\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}} \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}s = -\mathrm{i} \sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

wenn ϵ gegen Null und R gegen unendlich geht. Hier haben wir nun $\lim_{\epsilon \to 0^+} \sqrt{-s - \mathrm{i}\epsilon} = \sqrt{s} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$, für $s > 0$, verwendet. Nun können wir alle unsere Berechnungen zusammensetzen und erhalten

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \right](t) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{1}{\sqrt{s}} \mathrm{e}^{st} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot 2\mathrm{i} \sqrt{\frac{\pi}{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

dank dem Satz von Cauchy und weil unser Integrand keine Singularität in dem von γ_R eingeschlossenen Gebiet hat.

Aufgabe 12.4 Zwei Differentialgleichungen

(12.4a) Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\dot{y}(t) + y(t) = \mathrm{e}^t, \qquad t > 0, \qquad y(0) = 1.$$

Lösung: Sei $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$. Laut dem Differentiationssatz aus der Vorlesung gilt $\mathcal{L}[\dot{y}](s) = s \cdot Y(s) - y(0)$ und damit

$$s \cdot Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Also auch

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s^2-1}.$$

Nun benutzen wir eine Laplacetransformationstabelle und sehen, dass

$$y(t) = \cosh(t).$$

(12.4b) Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2y(t) = 4t^2, \qquad t > 0,$$
$$\dot{y}(0) = 4, \qquad y(0) = 1.$$

Lösung: Sei erneut $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$. Der Differentiationssatz zweimal angewendet besagt

$$\mathcal{L}[\ddot{y}](s) = s\mathcal{L}[\dot{y}](s) - \dot{y}(0) = s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - \dot{y}(0).$$

In unserem Falle gilt also

$$s^2Y(s) - s - 4 - sY(s) + 1 - 2Y(s) = 4 \cdot \frac{2}{s^3}.$$

Damit berechnen wir für $Y(s)$ die Gleichung

$$Y(s) = \frac{s^4 + 3s^3 + 8}{s^3(s^2 - s - 2)} = \frac{s^4 + 3s^3 + 8}{s^3(s-2)(s+1)}.$$

Nun machen wir den Ansatz

$$\frac{s^4 + 3s^3 + 8}{s^3(s-2)(s+1)} = \frac{As^2 + Bs + C}{s^3} + \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s+1}$$

für die Partialbruchzerlegung. Damit erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$A + D + E = 1, \qquad -A + B + D - 2E = 3,$$
$$-2A - B + C = 0, \qquad -2B - C = 0, \qquad -2C = 8,$$

mit der Lösung $A = -3$, $B = 2$, $C = -4$, $D = 2$, $E = 2$. Also gilt

$$Y(s) = \frac{-3s^2 + 2s - 4}{s^3} + \frac{2}{s-2} + \frac{2}{s+1}.$$

Wir benutzen nun eine Rücktransformationstabelle, um zu sehen, dass

$$y(t) = -3 + 2t - 2t^2 + 2e^{2t} + 2e^{-t}.$$

Publiziert am 23. Mai.
Einzureichen am 30. Mai.