Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 2

Hinweis: Auf diesem Aufgabenblatt gibt es ein paar Aufgaben, welche etwas schwieriger sind als die anderen. Diese sind mit [*Bonus*] gekennzeichnet.

Aufgabe 2.1 Grenzwerte komplexer Funktionen

(2.1a) Berechnen Sie die Limites (Grenzwerte) der folgenden Funktionen an $z_0 = 0$, sofern diese existieren:

i) $\frac{\overline{z}+z^2}{z}$,

ii) $\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{1+z}$,

iii) $\frac{\cos(z)-1}{z^2}$,

iv) $\frac{\sin(z)}{\overline{z}}$.

Lösung:

i) Der Limes (Grenzwert) von
$$f(z) := \frac{\overline{z} + z^2}{z}$$
an $z_0 = 0$ existiert nicht. Nimmt man per Widerspruch an, es gebe einen Grenzwert, so müsste sich dieser finden lassen, indem man $z = x + \mathrm{i}y$ aus irgendeiner Richtung gegen $z_0 = 0$ gehen lässt. Betrachten wir aber
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2}{x} = 1$$
und
$$\lim_{y\to 0} f(\mathrm{i}y) = \lim_{y\to 0} \frac{-\mathrm{i}y - y^2}{\mathrm{i}y} = -1,$$
so sehen wir, dass sowohl 1 als auch -1 der Grenzwert von f sein müsste. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist.

ii) Der Limes von
$$f(z) := \frac{\mathrm{Log}(1 + z)}{1 + z}$$
an $z_0 = 0$ existiert und ist 0.

Bemerkung: Der nachfolgende Beweis ist recht mathematisch. Wer diese Aufgabe möglichst kurz beantworten möchte, der kann argumentieren, dass der Hauptwert des Logarithmus Log auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ stetig ist und dass somit f sicherlich in einer Umgebung um 0 stetig sein muss. Daher ist dann auch
$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = 0$$
wahr.

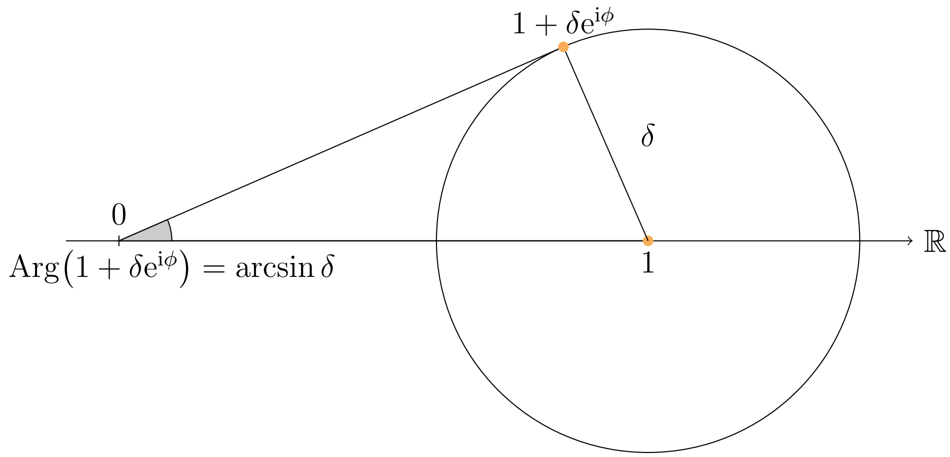

Abbildung 2.1: Geometrische Betrachtung von $1 + z$.

Wir bemerken zuerst einmal, dass

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \operatorname{Log}(1 + z)$$

gilt. Dann wollen wir zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \delta$

$$|\operatorname{Log}(1 + z)| < \epsilon$$

gilt. Sei also $\epsilon > 0$. Dann finden wir ein $\delta > 0$, sodass

$$\log(1 + \delta) < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad \arcsin \delta < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

Wir rechnen nach, dass

$$|\operatorname{Log}(1 + z)| = \sqrt{\log(|1 + z|)^2 + \operatorname{Arg}(1 + z)^2}.$$

Betrachten wir die Zahl $1 + z$ geometrisch, so sehen wir, dass sie in einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt 1 und Radius δ liegt. Damit gilt also – siehe Abbildung 2.1 – dass

$$1 - \delta < |1 + z| < 1 + \delta \qquad \text{und} \qquad -\arcsin \delta < \operatorname{Arg}(1 + z) < \arcsin \delta.$$

Wir schliessen nun, dass

$$|\operatorname{Log}(1 + z)| < \sqrt{\log(1 + \delta)^2 + \arcsin(\delta)^2} < \epsilon.$$

Damit ist bewiesen, dass der Grenzwert von f an 0 existiert und 0 ist.

iii) Der Limes von

$$f(z) := \frac{\cos(z) - 1}{z^2}$$

an $z_0 = 0$ existiert und ist $-\frac{1}{2}$. Man sieht dies indem man die Potenzreihe des Kosinus betrachtet. Wir haben nämlich

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-2}}{(2n)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n+2)!}$$

und somit

$$\lim_{z\to 0} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

iv) Der Limes von

$$f(z) := \frac{\sin(z)}{\overline{z}}$$

an $z_0 = 0$ existiert nicht. Nimmt man per Widerspruch an, es gebe einen Grenzwert, so müsste sich dieser finden lassen, indem man $z = x + \mathrm{i}y$ aus irgendeiner Richtung gegen $z_0 = 0$ gehen lässt. Betrachten wir aber

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1$$

und

$$\lim_{y\to 0} f(\mathrm{i}y) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{-\mathrm{i}y} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\mathrm{i}y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{y\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\mathrm{i}y)^{2n}}{(2n+1)!} = -1$$

so sehen wir, dass sowohl 1 als auch -1 der Grenzwert von f sein müssten. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist.

(2.1b) [*Bonus*] Betrachten Sie eine Funktion $f = u + \mathrm{i}v$ und komplexe Zahlen $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ gilt, genau dann wenn $\lim_{z\to z_0} u(z) = \operatorname{Re} w_0$ und $\lim_{z\to z_0} v(z) = \operatorname{Im} w_0$ gelten.

Lösung: Nehmen wir erst einmal an, dass $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ gilt und betrachten ein beliebiges $\epsilon > 0$. Dann finden wir ein $\delta > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$

$$|f(z) - w_0| < \epsilon$$

gilt. Somit haben wir aber auch, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$

$$|u(z) - \operatorname{Re} w_0| = |\operatorname{Re}(f(z) - w_0)| \leq |f(z) - w_0| < \epsilon$$

gilt, da ganz allgemein für $z = x + \mathrm{i}y$

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

gilt. Ebenso ist es richtig, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$

$$|v(z) - \operatorname{Im} w_0| = |\operatorname{Im}(f(z) - w_0)| \leq |f(z) - w_0| < \epsilon.$$

Also haben wir gezeigt, dass $\lim_{z\to z_0} u(z) = \operatorname{Re} w_0$ und $\lim_{z\to z_0} v(z) = \operatorname{Im} w_0$.

Nehmen wir umgekehrt $\lim_{z\to z_0} u(z) = \operatorname{Re} w_0$ und $\lim_{z\to z_0} v(z) = \operatorname{Im} w_0$ an und betrachten ein $\epsilon > 0$, dann finden wir $\delta_u > 0$ und $\delta_v > 0$ sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta_u$

$$|u(z) - \operatorname{Re} w_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta_v$

$$|v(z) - \operatorname{Im} w_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

gilt. Ist nun also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \min(\delta_u, \delta_v)$, so folgt

$$|f(z) - w_0| = \sqrt{(u(z) - \operatorname{Re} w_0)^2 + (v(z) - \operatorname{Im} w_0)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon.$$

Also auch $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$.

Aufgabe 2.2 Ableitungen komplexer Funktionen

(2.2a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen nach x und y und die Ableitung nach $z = x+\mathrm{i}y$ der folgenden Funktionen, sofern diese existieren:

i) $3z^3 + z - 3$,

ii) $\sin(\mathrm{Re}(z))$,

iii) $\frac{1}{z^2}$,

iv) $\mathrm{e}^{-\pi z^2}$.

Lösung:

i) Benutzen wir $z = x + \mathrm{i}y$, so erhalten wir

$$f(z) := 3z^3 + z - 3 = 3(x + \mathrm{i}y)^3 + x + \mathrm{i}y - 3.$$

Damit lassen sich die partiellen Ableitungen nach x und y leicht berechnen. Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x + \mathrm{i}y) = 9(x + \mathrm{i}y)^2 + 1,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x + \mathrm{i}y) = 9\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)^2 + \mathrm{i}.$$

Desweiteren bemerken wir, dass f ein Polynom in z ist. Also können wir es nach den altbekannten Ableitungsregeln ableiten. Wir erhalten somit

$$f'(z) = 9z^2 + 1.$$

ii) Wir sehen, dass $f(z) := \sin(\mathrm{Re}(z)) = \sin(x)$, für $z = x + \mathrm{i}y$. Damit gilt also

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x + \mathrm{i}y) = \cos(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x + \mathrm{i}y) = 0.$$

Die Ableitung nach z existiert nur an $S := \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k + \mathrm{i}y \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{C}$. Um dies zu sehen, betrachten wir ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S$ und nehmen per Widerspruch an

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

würde existieren. Schreiben wir $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ und betrachten die Limites

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x + \mathrm{i}y_0) - f(x_0 + \mathrm{i}y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \cos(x_0)$$

und

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + \mathrm{i}y) - f(x_0 + \mathrm{i}y)}{y - y_0} = 0,$$

so sehen wir dass $f'(z_0)$ sowohl $\cos(x_0) \neq 0$ als auch 0 sein müsste. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Ableitung von f an beliebigen Stellen $z_0 \in S$ gleich null ist, indem man das ϵ-δ Kriterium wie in Aufgabe (2.1a) benutzt.

iii) Wir haben

$$f(z) := \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x+\mathrm{i}y)^2}$$

mit $z = x + \mathrm{i}y$. Also folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+\mathrm{i}y) = -\frac{2}{(x+\mathrm{i}y)^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x+\mathrm{i}y) = -\frac{2\mathrm{i}}{(x+\mathrm{i}y)^3}.$$

Ausserdem ist $f(z)$ komplex differenzierbar. Wir erwarten, dass $f'(z) = -\frac{2}{z^3}$ gilt. Man kann dies zeigen, indem man ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ benutzt und

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

betrachtet. Wir haben nämlich

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z_0^2 - z^2}{(z - z_0)z^2 z_0^2} = -\lim_{z\to z_0} \frac{z_0 + z}{z^2 z_0^2} = -\frac{2}{z_0^3}.$$

iv) Wir haben

$$f(z) := \mathrm{e}^{-\pi z^2} = \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}y)^2}$$

mit $z = x + \mathrm{i}y$. Also folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+\mathrm{i}y) = -2\pi(x+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}y)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x+\mathrm{i}y) = -2\pi\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}y)^2}.$$

Ausserdem ist $f(z)$ komplex differenzierbar – i.e. nach z differenzierbar. Man sieht dies leicht, indem man die Kettenregel und $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$ benutzt. Wir erhalten somit nämlich

$$f'(z) = -2\pi z \mathrm{e}^{-\pi z^2}.$$

(2.2b) [*Bonus*] Setzen Sie die Funktion $f(z) := \frac{\bar{z}^2}{z}$ an $z_0 = 0$ stetig fort. Ist das Resultat an $z_0 = 0$ nach z differenzierbar?

Lösung: Wir beginnen damit den Grenzwert von f an $z_0 = 0$ zu berechnen. Wir benutzen das ϵ-δ Kriterium wie in Aufgabe (2.1a) und fixieren ein beliebiges $\epsilon > 0$. Damit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \delta := \epsilon$, dass

$$|f(z)| = |z| < \epsilon.$$

Also ist $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$ und wir können f durch 0 an $z_0 = 0$ stetig fortsetzen. Die stetige Fortsetzung von f schreiben wir als

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Wir können zeigen, dass $\widetilde{f}$ an $z_0 = 0$ nicht komplex differenzierbar ist. Nehmen wir nämlich per Widerspruch an

$$\widetilde{f}'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\widetilde{f}(z)}{z}$$

würde existieren, dann gilt sowohl

$$\lim_{x\to 0} \frac{\widetilde{f}(x)}{x} = 1$$

als auch

$$\lim_{x\to 0} \frac{\widetilde{f}(x+\mathrm{i}x)}{x+\mathrm{i}x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\mathrm{i}x)^2}{(x+\mathrm{i}x)^2} = \frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})^2} = -1$$

so sehen wir dass $\widetilde{f}'(0)$ sowohl 1 als auch -1 sein müsste. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2.3 Der Hauptwert des Logarithmus

Finden Sie zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so dass

$$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2).$$

Lösung: Schreiben wir die komplexen Zahlen in Polarform, so erhalten wir

$$z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}, \qquad z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}.$$

und damit

$$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Log}\big(r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}\big) = \log r_1 r_2 + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \log r_1 + \log r_2 + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2).$$

Also versuchen wir $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zu finden mit der Eigenschaft, dass

$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$

gilt. Betrachte $r_1, r_2 > 0$, $\phi_1 \in (0, \pi]$ und $\phi_2 \in (\pi - \phi_1, \pi]$ beliebig. Dann gilt

$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \phi_1 + \phi_2 - 2\pi \neq \phi_1 + \phi_2 = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$

und deswegen

$$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2).$$

Es lassen sich in obiges Resultat auch leicht Zahlen einsetzen. Betrachten wir zum Beispiel $r_1 = r_2 = 1$ und $\phi_1 = \phi_2 = \pi$, so erhalten wir $z_1 = z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. Ausserdem gilt

$$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Log}(1) = 0 \neq \mathrm{i}\pi + \mathrm{i}\pi = \mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}(-1) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2).$$

Bemerkung: Es ist auch möglich $\phi_1 \in (-\pi, 0)$ und $\phi_2 \in (-\pi, -\pi - \phi_1)$ beliebig zu wählen und somit auf der unteren Seite des Intervals $(-\pi, \pi]$ herauszufallen.

Aufgabe 2.4 De Moivres Formel

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie de Moivres Formel

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = \cos n\phi + \mathrm{i}\sin n\phi.$$

Lösung: Benutzen wir Eulers Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi,$$

so folgt diese Aussage schnell. Wir haben damit nämlich

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} = \cos n\phi + \mathrm{i}\sin n\phi.$$

Aufgabe 2.5 Eine Kuriose Identität

Berechnen Sie

$$(-1+\mathrm{i})^{103}.$$

Lösung: Formen wir $z = (-1+\mathrm{i})$ in Polarform um, so erhalten wir

$$z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}.$$

Das Berechnen der Potenz ist nun schnell gemacht:

$$(-1+\mathrm{i})^{103} = \sqrt{2}^{103}\mathrm{e}^{\frac{309\pi\mathrm{i}}{4}} = \sqrt{2}^{103}\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{4}+76\pi\mathrm{i}} = \sqrt{2}^{103}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}} = \sqrt{2}^{102}\cdot(-1-\mathrm{i}) = -2^{51}(1+\mathrm{i}).$$

Aufgabe 2.6 Die Mitternachtsformel

Beweisen Sie die Mitternachtsformel. Zur Erinnerung: Die Mitternachtsformel besagt, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung $az^2+bz+c=0$ mit $a\neq 0$ und $a,b,c\in\mathbb{C}$ gegeben sind durch

$$z = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

wobei beide (komplexe) Quadratwurzeln Lösungen sind, wenn $b^2-4ac\neq 0$.

Bemerkung: Die Mitternachtsformel wird wahlweise auch p-q Formel oder grosse Lösungsformel genannt.

Lösung: Wir dividieren die Gleichung $az^2+bz+c=0$ durch a und erhalten

$$0 = z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a} = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$$

durch quadratisches Ergänzen. Somit gilt also

$$z+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Wir schliessen, dass

$$z = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Aufgabe 2.7 Ein komplexes Polynom

(2.7a) Schreiben Sie die Funktion $f(z) := z^3+z+1$ in der Form $f(z) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$.

Lösung: Wir benutzen $z = x+\mathrm{i}y$ und rechnen

$$\begin{aligned} f(z) &= (x+\mathrm{i}y)^3+(x+\mathrm{i}y)+1 = x^3+3\mathrm{i}x^2y-3xy^2-\mathrm{i}y^3+x+\mathrm{i}y+1 \\ &= (x^3-3xy^2+x+1)+\mathrm{i}(3x^2y-y^3+y). \end{aligned}$$

Also gilt $f(z) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ mit

$$u(x,y) := x^3-3xy^2+x+1, \qquad v(x,y) := 3x^2y-y^3+y.$$

(2.7b) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um $\mathrm{Re}\, f(z)$, $\mathrm{Im}\, f(z)$ und $|f(z)|$ auf dem Gebiet $\{z = x + \mathrm{i}y \,|\, x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1]\}$ zu plotten.

Lösung: Wir benutzen folgendes Python Programm für unsere Plots.

```python
from __future__ import division
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
import numpy as np

def main():

    # generate a grid to plot on
    [X,Y] = np.meshgrid(np.linspace(-1.0, 1.0), np.linspace(-1.0, 1.0))

    # compute real part, imaginary part and absolute value of f
    Re_f = X**3 - 3*np.multiply(X, Y**2) + X + 1
    Im_f = 3*np.multiply(X**2, Y) - Y**3 + Y
    Z = X + 1j*Y
    Abs_f = np.abs(Z**3 + Z + 1)

    # plot and store the real part
    fig = plt.figure(figsize=(12,9))
    ax = fig.gca(projection='3d')
    surf = ax.plot_surface(X, Y, Re_f, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0,
                           antialiased=False)
    plt.savefig('real.png', bbox_inches='tight')

    # plot and store the imaginary part
    fig = plt.figure(figsize=(12,9))
    ax = fig.gca(projection='3d')
    surf = ax.plot_surface(X, Y, Im_f, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0,
                           antialiased=False)
    plt.savefig('imag.png', bbox_inches='tight')

    # plot and store the absolute value
    fig = plt.figure(figsize=(12,9))
    ax = fig.gca(projection='3d')
    surf = ax.plot_surface(X, Y, Abs_f, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0,
                           antialiased=False)
    plt.savefig('abs.png', bbox_inches='tight')

if __name__ == '__main__':
    main()
```

Damit erhalten wir die Bilder in den Abbildungen 2.2, 2.3 und 2.4.

Publiziert am 28. Februar.

Einzureichen am 07. März.

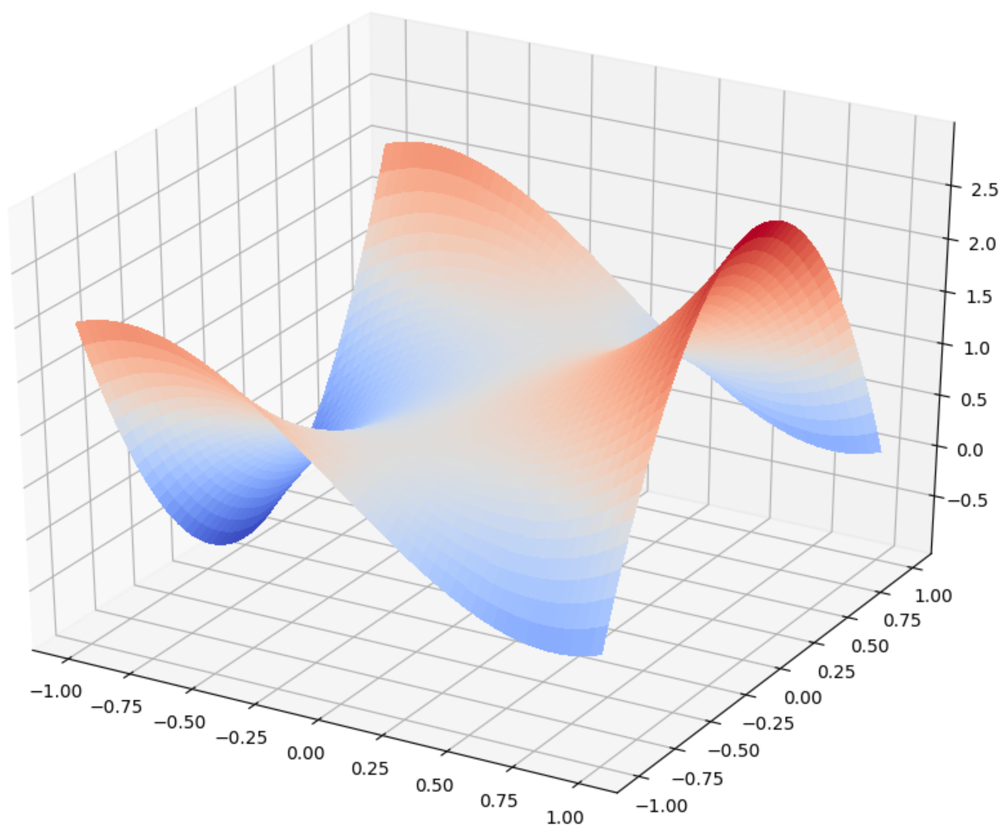

Abbildung 2.2: Realteil der Funktion f.

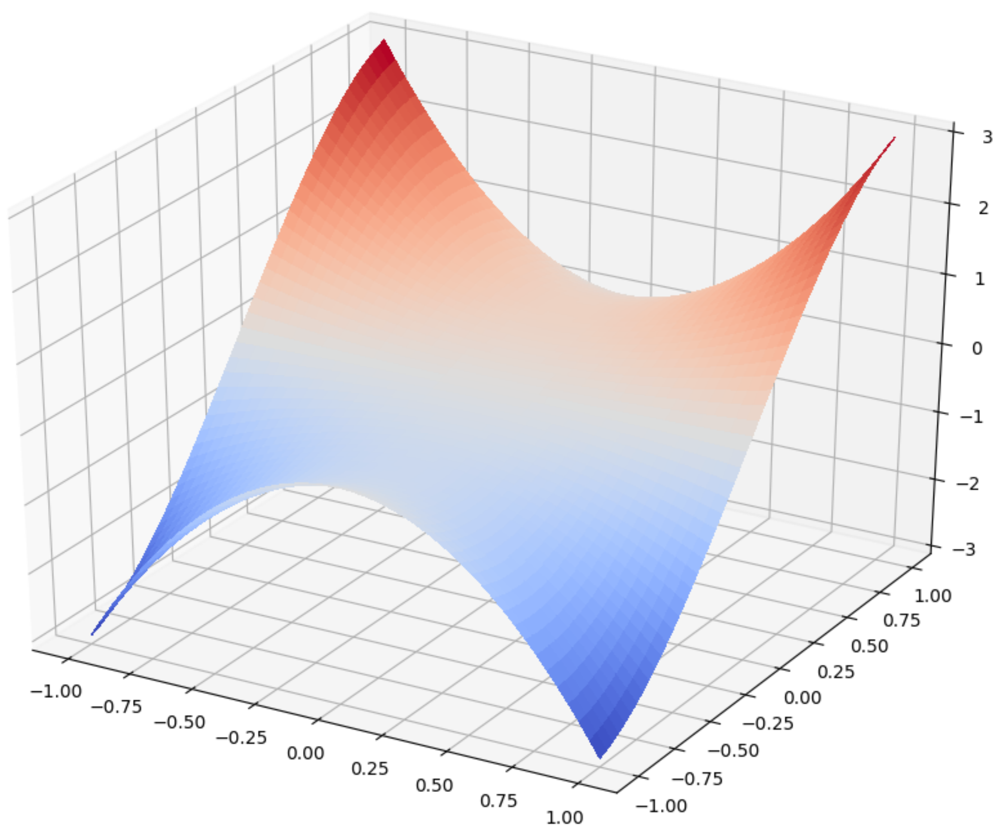

Abbildung 2.3: Imaginärteil der Funktion f.

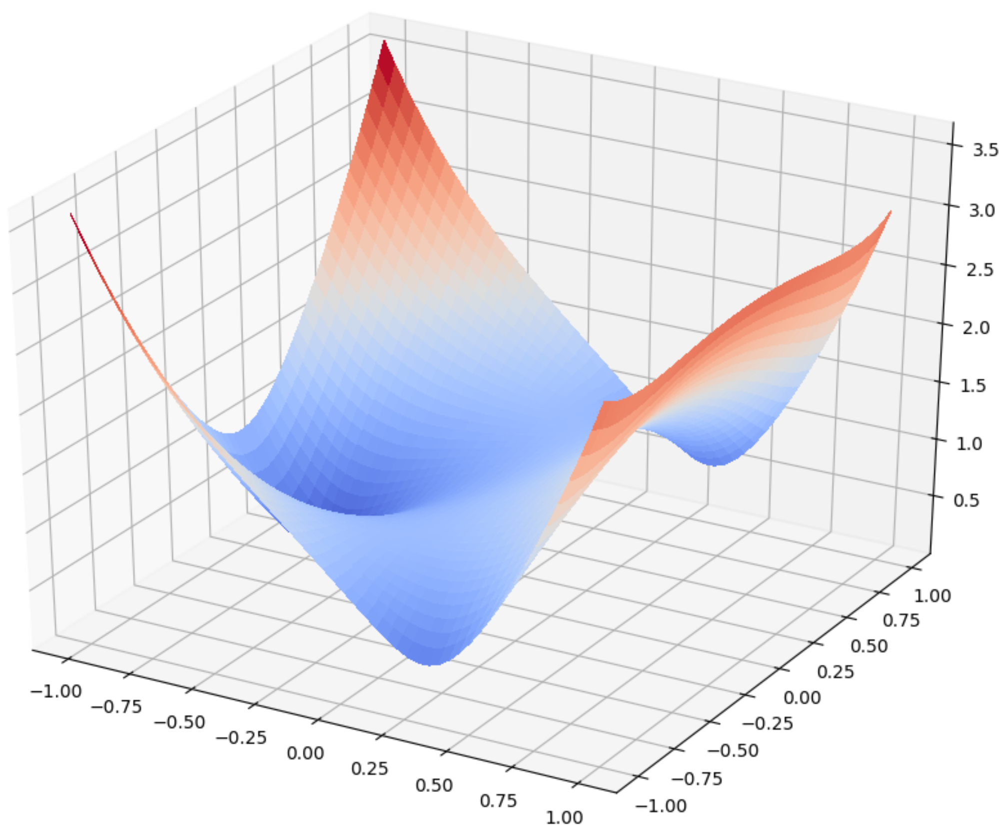

Abbildung 2.4: Absolutbetrag der Funktion f.