Serie 3

Aufgabe 3.1 Einschreibung in Echo

Wichtig: Bitte schreiben Sie sich auf echo.ethz.ch in die Übungsstunde, welche Sie auch besuchen, ein! Dies bedeutet, dass Sie sich eventuell aus einer Übungsstunde ausschreiben müssen, die Sie nicht besuchen.

Hinweis: Das Umschreiben in die korrekte Übungsstunde hilft uns dabei den Assistierenden frühzeitig mitzuteilen, sollte niemand in ihre Stunden kommen, und die Räume der ETH wieder freizugeben.

Aufgabe 3.2 $\mathbb{R}$-Linearität und $\mathbb{C}$-Linearität

(3.2a) Betrachten Sie die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathrm{i}\mathbf{e}_1, \mathrm{i}\mathbf{e}_2\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}^2$ bildet.

Lösung: Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ ein minimales Erzeugendensystem für $\mathbb{C}^2$ ist. Sei dazu $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$ beliebig. Dann lässt sich $\mathbf{z}$ schreiben als

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \mathrm{i}y_1 \\ x_2 + \mathrm{i}y_2 \end{pmatrix},$$

wobei $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt also

$$\mathbf{z} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + y_1\mathrm{i}\mathbf{e}_1 + y_2\mathrm{i}\mathbf{e}_2$$

und $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem. Wir können uns auch davon überzeugen, dass wir keinen Vektor aus $\mathcal{B}$ entfernen können, ohne dass dabei die erzeugende Eigenschaft von $\mathcal{B}$ verloren geht. Benutzen wir das Symbol span um die lineare Hülle einer Menge von Vektoren zu beschreiben, so gilt nämlich

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(\mathcal{B} \setminus \{\mathbf{e}_1\}) &= \mathrm{i}\mathbb{R} \times \mathbb{C}, \qquad & \operatorname{span}(\mathcal{B} \setminus \{\mathbf{e}_2\}) &= \mathbb{C} \times \mathrm{i}\mathbb{R}, \\ \operatorname{span}(\mathcal{B} \setminus \{\mathrm{i}\mathbf{e}_1\}) &= \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \qquad & \operatorname{span}(\mathcal{B} \setminus \{\mathrm{i}\mathbf{e}_2\}) &= \mathbb{C} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{B}$ also ein minimales Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^2$ und somit eine Basis.

(3.2b) Betrachte nun eine Matrix

$$A_L := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Die Matrix A_L beschreibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ in der Basis $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathrm{i}\mathbf{e}_1, \mathrm{i}\mathbf{e}_2\}$. Was muss für ihre Koeffizientent a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, gelten damit L auch $\mathbb{C}$-linear ist?

Lösung: In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ welche $L(\mathrm{i}\mathbf{e}_1) = \mathrm{i} \cdot L(\mathbf{e}_1)$ und $L(\mathrm{i}\mathbf{e}_2) = \mathrm{i} \cdot L(\mathbf{e}_2)$ erfüllen auch $\mathbb{C}$-linear sein müssen. Daraus folgen die Bedingungen

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix} = \mathrm{i} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{31} \\ -a_{41} \\ a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{32} \\ -a_{42} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix},$$

wobei wir

$$\begin{aligned} \mathrm{i} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \mathrm{i} \cdot (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + y_1\mathrm{i}\mathbf{e}_1 + y_2\mathrm{i}\mathbf{e}_2)_{\mathcal{B}} \\ &= (-y_1\mathbf{e}_1 - y_2\mathbf{e}_2 + x_1\mathrm{i}\mathbf{e}_1 + x_2\mathrm{i}\mathbf{e}_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

benutzt haben. Die Koeffizienten a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, müssen also

$$\begin{aligned} a_{13} &= -a_{31}, & a_{23} &= -a_{41}, & a_{33} &= a_{11}, & a_{43} &= a_{21}, \\ a_{14} &= -a_{32}, & a_{24} &= -a_{42}, & a_{34} &= a_{12}, & a_{44} &= a_{22} \end{aligned}$$

erfüllen damit L $\mathbb{C}$-linear ist.

Aufgabe 3.3 Regel von de l'Hospital

Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die in einer Umgebung von $z_0 = 0$ differenzierbar sind und für die $f(0) = g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$ gilt. Dann gilt die Regel von de l'Hospital

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Lösung: Wir benutzen die Definition der Differenzierbarkeit an $z_0 = 0$ und erhalten

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{z}{g(z)} = f'(0) \cdot \frac{1}{\lim_{z \to 0} \frac{g(z)}{z}} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Bemerkung: Die etwas allgemeinere Aussage

> Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die in einer Umgebung von $z_0 = 0$ differenzierbar sind, für die $f(0) = g(0) = 0$ gilt und der Grenzwert
>
> $$\lim_{z \to 0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$
>
> existiert. Dann gilt
>
> $$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

lässt sich ähnlich leicht beweisen. Man braucht hierfür jedoch Konzepte, welche wir in der Vorlesung noch nicht eingeführt haben.

Aufgabe 3.4 Die Kettenregel

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sowohl $\gamma : [0,1] \to U$, als auch $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Sei ausserdem $g(t) := f(\gamma(t))$. Leiten Sie die Kettenregel

$$g'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

her.

Lösung: Wir betrachten $t_0 \in (0,1)$ und

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{\gamma(t) - \gamma(t_0)} \cdot \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Da f differenzierbar ist gilt, dass

$$f'(\gamma(t_0)) = \lim_{z\to\gamma(t_0)} \frac{f(z) - f(\gamma(t_0))}{z - \gamma(t_0)}$$

existiert und somit, dass

$$f'(\gamma(t_0)) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{\gamma(t) - \gamma(t_0)},$$

da γ stetig ist. Alles in allem folgt

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{\gamma(t) - \gamma(t_0)} \cdot \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = f'(\gamma(t_0)) \cdot \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \\ &= f'(\gamma(t_0)) \cdot \dot{\gamma}(t_0). \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5 Die Cauchy–Riemann Gleichungen

Wir benutzen die Notation

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Welche der im Folgenden definierten Funktionen sind holomorph?

(3.5a) $u(x,y) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $v(x,y) := 4x^3y - 4xy^3$.

Lösung: In all diesen Aufgaben werden wir zeigen, dass die Cauchy–Riemann Gleichungen erfüllt oder nicht erfüllt sind. Wir verifizieren

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 4x^3 - 12xy^2 = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = -12x^2y + 4y^3 = -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y).$$

Damit folgt, dass f holomorph ist.

(3.5b) $u(x,y) := x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) := -3x^2y + y^3$.

Lösung: Hier rechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 = -\frac{\partial}{\partial y}v(x,y),$$

sodass die Cauchy–Riemann Gleichungen nicht erfüllt sind. Also ist f nicht holomorph.

(3.5c) $u(x,y) := \sin(x^2 - y^2)\cosh(2xy)$, $v(x,y) := -\cos(x^2 - y^2)\sinh(2xy)$.

Lösung: Zuerst wollen wir sehen, dass

$$\cosh'(z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = \sinh(z)$$

und

$$\sinh'(z) = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cosh(z)$$

gilt. Damit rechnen wir nun

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 2x\cos(x^2 - y^2)\cosh(2xy) + 2y\sin(x^2 - y^2)\sinh(2xy) = -\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$$

nach. Also sind die Cauchy–Riemann Gleichungen nicht erfüllt und f ist nicht holomorph.

(3.5d) $u(x,y) := \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $v(x,y) := \mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

Lösung: Wir rechnen direkt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$$

gelten. Also sind die Cauchy–Riemann Gleichungen erfüllt und f ist holomorph.

Hinweis: Der Kosinus Hyperbolicus und der Sinus Hyperbolicus sind gegeben durch

$$\cosh(z) := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \sinh(z) := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Aufgabe 3.6 Die Cauchy–Riemann Gleichungen in Polarkoordinaten

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wir können f dann in algebraischen Koordinaten als $f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ oder in Polarkoordinaten als $f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) = \widetilde{u}(r,\phi) + \mathrm{i}\widetilde{v}(r,\phi)$ schreiben. Die Cauchy–Riemann Gleichungen in algebraischen Koordinaten sind aus der Vorlesung bekannt und lauten

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y).$$

Zeigen Sie, dass wenn f die Cauchy–Riemann Gleichungen in algebraischen Koordinaten erfüllt – also holomorph ist – dann f auch die Cauchy–Riemann Gleichungen in Polarkoordinaten

$$r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{u}(r,\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi}\widetilde{v}(r,\phi), \qquad \frac{\partial}{\partial \phi}\widetilde{u}(r,\phi) = -r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{v}(r,\phi)$$

erfüllt.

Lösung: Wir betrachten die Koordinatentransformationen

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi.$$

Damit können wir $\widetilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi)$ und $\widetilde{v}(r,\phi) = v(r\cos\phi, r\sin\phi)$ schreiben. Wir erhalten dank der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{u}(r,\phi) = \frac{\partial}{\partial x}u(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot \cos\phi + \frac{\partial}{\partial y}u(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot \sin\phi$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\widetilde{u}(r,\phi) = -\frac{\partial}{\partial x}u(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r\sin\phi + \frac{\partial}{\partial y}u(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r\cos\phi.$$

Ebenso folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{v}(r,\phi) = \frac{\partial}{\partial x}v(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot \cos\phi + \frac{\partial}{\partial y}v(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot \sin\phi$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\widetilde{v}(r,\phi) = -\frac{\partial}{\partial x}v(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r\sin\phi + \frac{\partial}{\partial y}v(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r\cos\phi.$$

Es folgt jetzt unmittelbar aus der algebraischen Form der Cauchy–Riemann Gleichungen, dass

$$r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{u}(r,\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi}\widetilde{v}(r,\phi) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial \phi}\widetilde{u}(r,\phi) = -r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{v}(r,\phi).$$

Aufgabe 3.7 Das Wirtinger Kalkül

(3.7a) Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gilt

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Wenden Sie die Kettenregel auf informelle Art und Weise auf $F(x,y)$ an, um den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}F + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}F\right)$$

herzuleiten.

Lösung: Wir rechnen direkt nach, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\partial}{\partial y}F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right) \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\right).\end{aligned}$$

(3.7b) Wir definieren den Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Zeigen Sie dass, wenn eine Funktion f holomorph ist – also ihr Real- und Imaginärteil die Cauchy–Riemann Gleichungen erfüllen – dann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$$

ist.

Lösung: Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x + \mathrm{i}y) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x + \mathrm{i}y) + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} f(x + \mathrm{i}y) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \right) = 0
\end{aligned}$$

gilt.

Bemerkung: Wir nennen $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ die *Wirtinger Ableitung*.

Aufgabe 3.8 Einige Wegintegrale

(3.8a) Betrachten Sie den Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, welcher den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ im Uhrzeigersinn parametrisiert. Berechnen Sie nun

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} \, \mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Lösung: Zuallererst wollen wir den Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mathematisch genau beschreiben. Wir definieren dazu $\gamma(t) := \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t}$ und berechnen

$$\dot{\gamma}(t) = -2\pi \mathrm{i} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t} = -2\pi \mathrm{i} \gamma(t).$$

Nun betrachten wir $n = 1$ und rechnen

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}t = -2\pi \mathrm{i} \cdot \int_0^1 \mathrm{d}t = -2\pi \mathrm{i}.$$

Ist $n \neq 1$, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z^n} \, \mathrm{d}z &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)^n} \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}t = -2\pi \mathrm{i} \cdot \int_0^1 \gamma(t)^{1-n} \, \mathrm{d}t = -2\pi \mathrm{i} \cdot \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t(1-n)} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1-n} \cdot \left[\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t(1-n)} \right]_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

(3.8b) Betrachten Sie die beiden Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$, welche in Abbildung 3.1 dargestellt sind. Berechnen Sie damit die Integrale

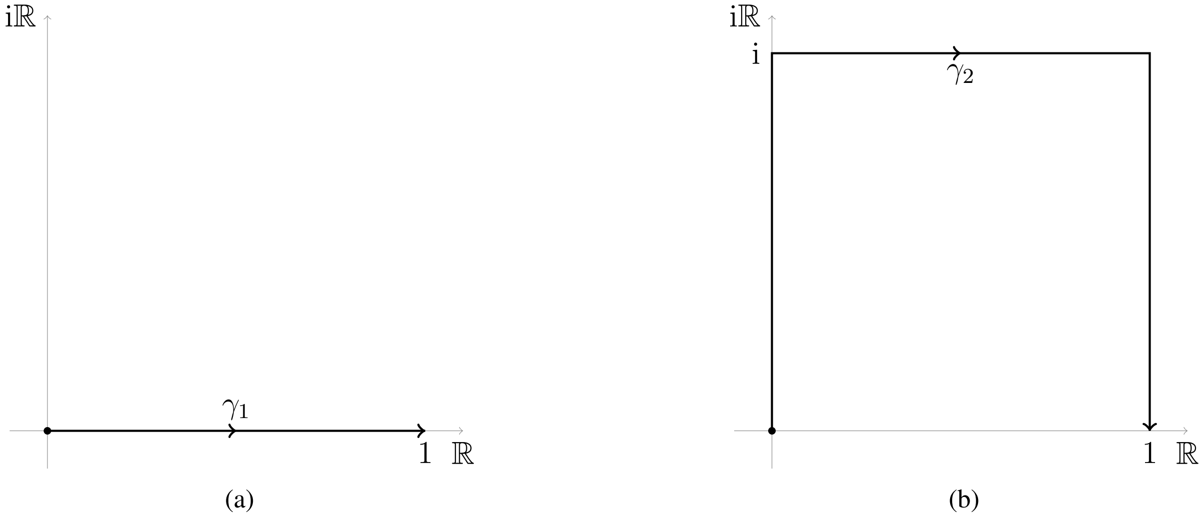

Abbildung 3.1: Die Wege γ_1 und γ_2.

i) $\int_{\gamma_1} \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z$,

ii) $\int_{\gamma_2} \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z$,

iii) $\int_{\gamma_1} z^2\,\mathrm{d}z$,

iv) $\int_{\gamma_2} z^2\,\mathrm{d}z$.

Lösung:

i) Wir betrachten den Weg $\gamma_1(t) := t$ mit $\dot{\gamma}_1(t) = 1$. Damit gilt

$$\int_{\gamma_1} \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \operatorname{Re}(\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

ii) Wir teilen den Weg γ_2 in drei Teilpfade auf. Zuerst betrachten wir $\gamma_{2,1}(t) := \mathrm{i}t$ mit $\dot{\gamma}_{2,1}(t) = \mathrm{i}$. Dann durchlaufen wir $\gamma_{2,2}(t) := t + \mathrm{i}$ mit $\dot{\gamma}_{2,2}(t) = 1$. Zu guter Letzt benutzen wir noch $\gamma_{2,3}(t) := 1 + \mathrm{i} - \mathrm{i}t$ mit $\dot{\gamma}_{2,3}(t) = -\mathrm{i}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{2,1}} \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,2}} \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,3}} \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{i} \cdot \int_0^1 \operatorname{Re}(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \operatorname{Re}(t+\mathrm{i})\,\mathrm{d}t - \mathrm{i} \cdot \int_0^1 \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}-\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t - \mathrm{i} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

iii) Hier rechnen wir

$$\int_{\gamma_1} z^2\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \gamma_1(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

iv) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} z^2 \, \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{2,1}} z^2 \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,2}} z^2 \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,3}} z^2 \, \mathrm{d}z \\
&= \mathrm{i} \cdot \int_0^1 (\mathrm{i}t)^2 \, \mathrm{d}t + \int_0^1 (t + \mathrm{i})^2 \, \mathrm{d}t - \mathrm{i} \cdot \int_0^1 (1 + \mathrm{i} - \mathrm{i}t)^2 \, \mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{i} \cdot \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 + 2\mathrm{i}t - 1 \, \mathrm{d}t - \mathrm{i} \cdot \int_0^1 (1 + \mathrm{i})^2 - 2\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})t - t^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^2 - 1 \, \mathrm{d}t - \mathrm{i} \cdot \int_0^1 (1 + \mathrm{i})^2 - 2\mathrm{i}t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} - 1 - \mathrm{i}(1 + \mathrm{i})^2 - 1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Es ist interessant zu bemerken, dass unsere Rechnungen $\int_{\gamma_1} z^2 \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} z^2 \, \mathrm{d}z$ implizieren. Dies würde nämlich auch direkt aus dem Satz von Cauchy folgen.

Publiziert am 07. März.

Einzureichen am 14. März.