Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 4

Aufgabe 4.1 Die Divergenz von Vektorfeldern

(4.1a) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um die folgenden Vektorfelder zu zeichnen.

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) := \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir benutzen folgendes Python Programm für unsere Plots.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def main():

    # generate a grid to plot on
    [X,Y] = np.meshgrid(np.linspace(-2.0, 2.0, 37), np.linspace(-2.0, 2.0, 37))

    # compute the vectorfields on the grid
    fX = np.multiply(X, Y)
    fY = np.multiply(X, Y)
    gX = X**2 + Y**2
    gY = X**2 - Y**2

    # plot the vectorfields and save the plots
    fig, ax = plt.subplots()
    ax.quiver(X, Y, fX, fY)
    plt.savefig('f.eps', bbox_inches='tight')

    fig, ax = plt.subplots()
    ax.quiver(X, Y, gX, gY)
    plt.savefig('g.eps', bbox_inches='tight')

if __name__ == '__main__':
    main()
```

Damit erhalten wir die Bilder in Abbildung 4.1.

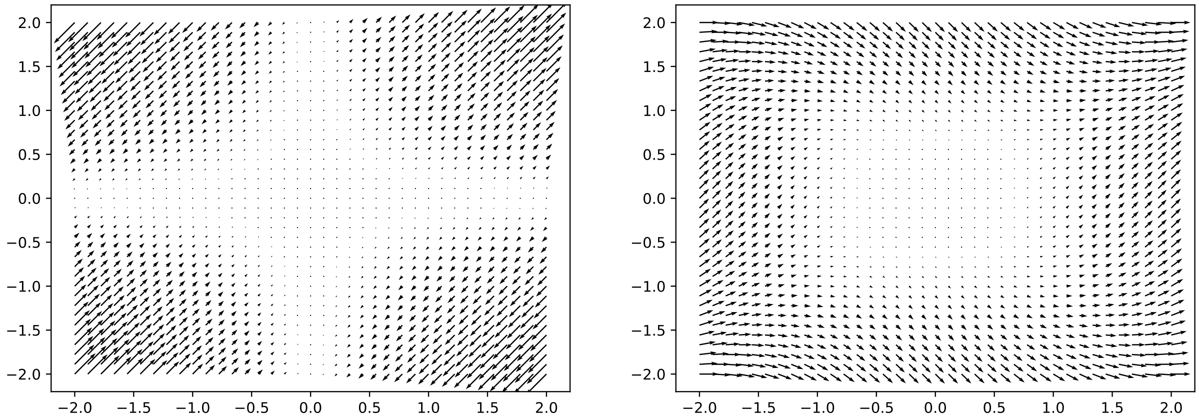
(4.1b) Berechnen Sie die Divergenz der Vektorfelder f und g und zeichnen Sie diese in derselben Programmiersprache, die Sie in (4.1a) verwendet haben.

Lösung: Die Divergenzen der Vektorfelder sind

$$\operatorname{div} f(x,y) = y + x, \qquad \operatorname{div} g(x,y) = 2x - 2y.$$

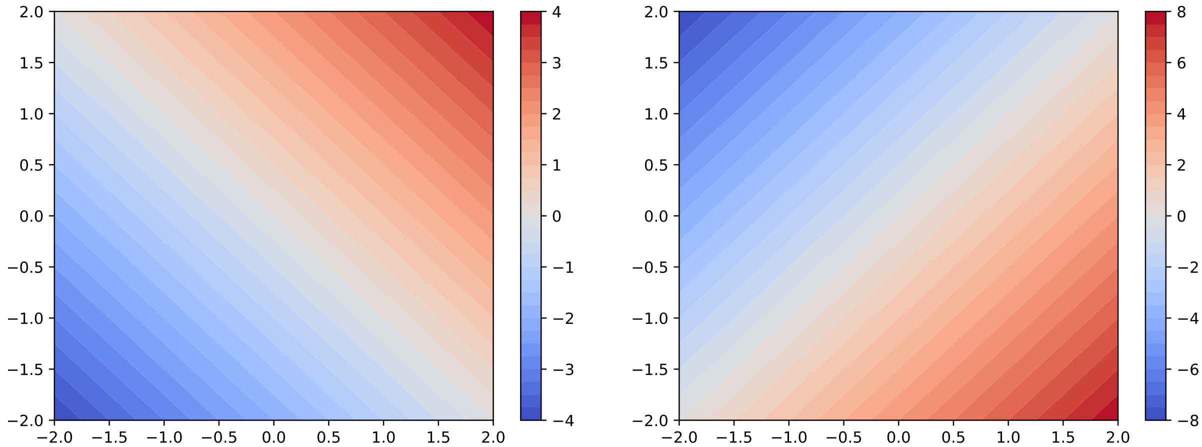
Wir benutzen folgendes Python Programm für unsere Plots.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm

def main():

    # generate a grid to plot on
    [X,Y] = np.meshgrid(np.linspace(-2.0, 2.0), np.linspace(-2.0, 2.0))
```



(a) f (b) g

Abbildung 4.1: Die Vektorfelder f und g.



(a) div f (b) div g

Abbildung 4.2: Die Divergenz von f und g.

```
    # compute the divergence of the vector fields on the grid
    divf = X + Y
    divg = 2*X - 2*Y

    # plot the vectorfields and save the plots
    fig = plt.contourf(X, Y, divf, 37, cmap=cm.coolwarm)
    plt.colorbar(fig)
    plt.savefig('divf.eps', bbox_inches='tight')
    plt.clf()

    fig = plt.contourf(X, Y, divg, 37, cmap=cm.coolwarm)
    plt.colorbar(fig)
    plt.savefig('divg.eps', bbox_inches='tight')

if __name__ == '__main__':
    main()
```

Damit erhalten wir die Bilder in Abbildung 4.2.

Aufgabe 4.2 Ein kompliziertes Pfadintegral

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2}\right) \mathrm{d}z,$$

wobei γ in Abbildung 4.3 gegeben ist.

Lösung: Wir bemerken, dass $\cos(z/2)$ die Stammfunktion

$$2\sin\left(\frac{z}{2}\right)$$

auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt. Laut dem Satz der Stammfunktion gilt also, dass

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2}\right) \mathrm{d}z = 0,$$

da γ geschlossen ist.

Aufgabe 4.3 Verschiedene Stammfunktionen

(4.3a) Hat z^n, $n \in \mathbb{Z}$, auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion? Wenn ja, welche?

Lösung: Ist $n \neq -1$, so kann man sich leicht davon überzeugen, dass $\frac{1}{n+1} z^{n+1}$ eine Stammfunktion von f ist. Desweiteren berechnen wir

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \int_0^1 \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i},$$

wobei γ die Parametrisierung des Einheitskreises im Gegenuhrzeigersinn ist. Laut dem Satz der Stammfunktion hat z^{-1} also keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

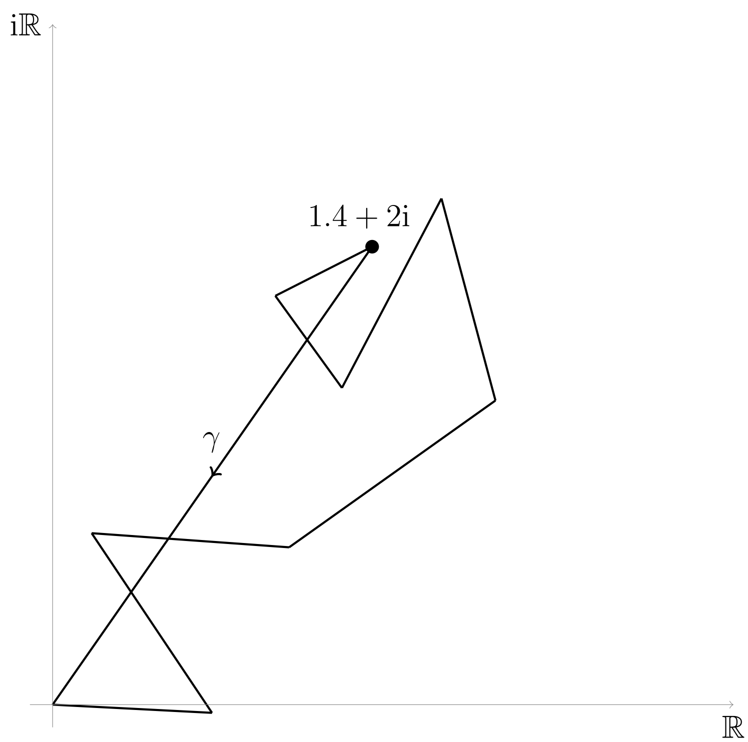


Abbildung 4.3: Der Weg γ.

(4.3b) Hat z^n, $n \in \mathbb{Z}$, auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ eine Stammfunktion? Wenn ja, welche?

Lösung: Ist $n \neq -1$, so hatten wir bereits in (4.3a) gesehen, dass eine Stammfunktion existiert. Auch für z^{-1} finden wir auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ eine Stammfunktion. Diese ist durch den Hauptwert des Logarithmus gegeben.

(4.3c) Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $\ell : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gibt mit $\exp(\ell(z)) = z$.

Lösung: Nehmen wir per Widerspruch an es gäbe so eine Funktion ℓ. Dann folgt sofort aus der Kettenregel, dass

$$1 = \exp(\ell(z))\ell'(z) = z\ell'(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Damit ist ℓ also eine Stammfunktion von z^{-1} auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. In Aufgabe (4.3a) hatten wir jedoch gezeigt, dass keine solche Funktion existiert. Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe 4.4 Harmonische Funktionen

Sei U einfach zusammenhängend und $u : U \to \mathbb{C}$ harmonisch, i.e.

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0.$$

Zeigen Sie: Es gibt $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{Re}(f(x + \mathrm{i}y)) = u(x, y)$.

(4.4a) Nehmen Sie an es gäbe f. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$$

und dass die Ableitung von f somit eindeutig durch u bestimmt ist.

Lösung: Entweder hatten wir in der Vorlesung gesehen, dass für komplex differenzierbare Funktionen $f = u + \mathrm{i}v$ die Regel

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y)$$

gilt, oder wir rechnen dies nach mit der Definition der Ableitung und

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + \mathrm{i}(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + \mathrm{i}(y - y_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x, y_0) + \mathrm{i}(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y), \end{aligned}$$

da die Ableitung an z_0 existiert und wir den Grenzwert also aus jeglicher Richtung berechnen können. Da f nun eben holomorph ist, so gilt dank der Cauchy–Riemann Gleichungen auch

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y).$$

(4.4b) Wir benutzen nun also den Ansatz

$$g(z) := \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$$

für die Ableitung von f. Zeigen Sie, dass g holomorph ist.

Lösung: Wir überprüfen die Cauchy–Riemann Gleichungen. Schreiben wir $g = \widetilde{u} + \mathrm{i}\widetilde{v}$ so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{u}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{v}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{u}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{v}(x,y),$$

da die partiellen Ableitungen kommutieren. Somit ist g also holomorph.

(4.4c) Folgern Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ existiert mit $\operatorname{Re} f = u$.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Cauchy.

Lösung: Wir hatten g als Ansatz für die Ableitung von f benutzt. Deswegen fixieren wir nun $z_0 \in U$ und definieren

$$f(z) := u(x_0, y_0) + \int_\gamma g(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

wobei $\gamma : [0,1] \to U$ ein differenzierbarer Weg von z_0 nach z ist. Es bleibt zu zeigen, dass f tatsächlich eine holomorphe Funktion ist mit $\operatorname{Re} f = u$. Zuerst einmal folgt aus dem Satz von Cauchy, dass f nicht von der Wahl des Weges γ abhängt, da g holomorph und U einfach zusammenhängend ist. Wir sagen f ist wohldefiniert. Ausserdem ist f eine Stammfunktion von g. Also ist f holomorph und ausserdem gilt

$$f'(z) = g(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x,y).$$

Hat f Realteil $\widetilde{u}$ und Imaginärteil $\widetilde{v}$, so gilt

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{u}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{v}(x,y),$$

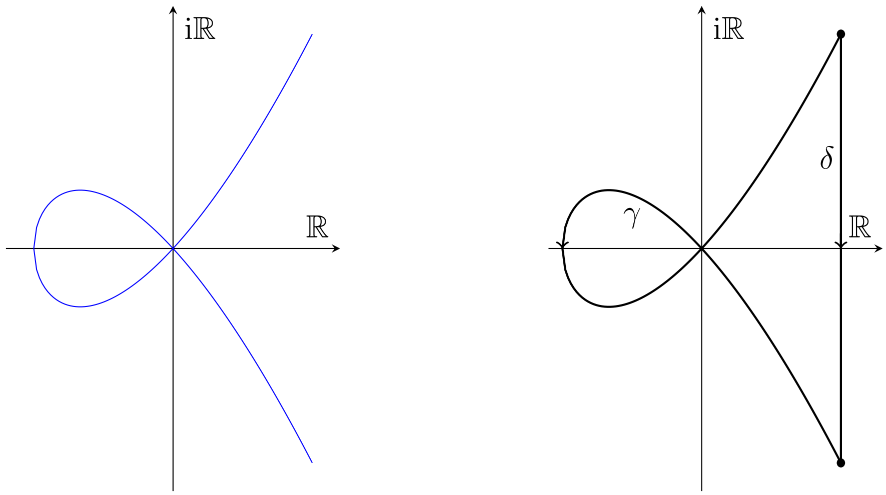
da f holomorph ist. Vergleichen wir dies mit g, so folgt dass $\widetilde{u} = u + c$, für ein $c \in \mathbb{R}$. Da aber $\widetilde{u}(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$ per Konstruktion gilt, folgt dass $\operatorname{Re} f = \widetilde{u} = u$.

(4.4d) Ist das in Aufgabe (4.4c) konstruierte f eindeutig?

Lösung: Nein, ist es nicht. Ist f nämlich holomorph mit $\operatorname{Re} f = u$, so ist $f + \mathrm{i}c$, für $c \in \mathbb{R}$, auch eine holomorphe Funktion mit Reilteil u. Man kann auch leicht zeigen, dass die Funktionenschar $f + \mathrm{i}c$, $c \in \mathbb{R}$, alle Lösungen unseres Problems beschreibt. Sind nämlich f und $\widetilde{f}$ zwei Funktionen mit $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \widetilde{f} = u$, so ist $f - \widetilde{f}$ eine rein komplexe holomorphe Funktion und muss darum konstant sein.

Aufgabe 4.5 Homotopie

(4.5a) Parametrisieren Sie die Kurve $y^2 = x^2(x+1)$ in $\mathbb{C}$ vom Anfangspunkt $1 + \sqrt{2}\mathrm{i}$ bis zum Endpunkt $1 - \sqrt{2}\mathrm{i}$.



(a) Die Kurve $y^2 = x^2(x+1)$. (b) Zwei homotope Wege.

Abbildung 4.4: Illustration der Fragestellung in Aufgabe 4.5.

Lösung: Wir setzen die Wegstücke

$$\gamma_0(t) := (1-2t) + \mathrm{i}(1-2t)\sqrt{2-2t} \qquad \text{und} \qquad \gamma_1(t) := (2t-1) + \mathrm{i}(1-2t)\sqrt{2t}$$

zusammen und erhalten $\gamma(t) := (\gamma_0 * \gamma_1)(t)$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-4t) + \mathrm{i}(1-4t)\sqrt{2-4t} & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (4t-3) + \mathrm{i}(3-4t)\sqrt{4t-2} & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(4.5b) Zeigen Sie, dass die parametrisierte Kurve aus Aufgabe (4.5a) homotop ist zur Kurve $\delta(t) := 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}(1-2t)$, $t \in [0,1]$.

Lösung: Betrachten wir die Funktion $H : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$H(s,t) := \begin{cases} [(1-4t)(1-s)+s] + \mathrm{i}[(1-4t)\sqrt{2-4t}(1-s) + s\sqrt{2}(1-2t)] & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ [(4t-3)(1-s)+s] + \mathrm{i}[(3-4t)\sqrt{4t-2}(1-s) + s\sqrt{2}(1-2t)] & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

so lässt sich zeigen, dass H eine Homotopie ist. Wir berechnen

$$H(0,t) = \begin{cases} (1-4t) + \mathrm{i}(1-4t)\sqrt{2-4t} & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (4t-3) + \mathrm{i}(3-4t)\sqrt{4t-2} & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} = \gamma(t),$$

$$H(1,t) = \begin{cases} 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}(1-2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}(1-2t) & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} = \delta(t),$$

und

$$H(s,0) = 1 + \sqrt{2}\mathrm{i}, \qquad H(s,1) = 1 - \sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass H stetig ist. Dies ist allerdings klar, da H nur aus stetigen Funktionen besteht.

(4.5c) Seien $\gamma_0 \sim \gamma_1$ und $\delta_0 \sim \delta_1$ je zwei homotope Wege in $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei ausserdem $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = \delta_0(0) = \delta_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\gamma_0 * \delta_0 \sim \gamma_1 * \delta_1.$$

Also, dass die Wege $\gamma_0 * \delta_0$ und $\gamma_1 * \delta_1$ homotop sind.

Lösung: Da $\gamma_0 \sim \gamma_1$ und $\delta_0 \sim \delta_1$ gilt, gibt es eine Homotopie $H_\gamma : [0,1]^2 \to U$ zwischen γ_0 und γ_1 und eine Homotopie $H_\delta : [0,1]^2 \to U$ zwischen δ_0 und δ_1. Wir definieren nun

$$H(s,t) := \begin{cases} H_\gamma(s, 2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_\delta(s, 2t-1) & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} H(0,t) &= \gamma_0 * \delta_0, & H(1,t) &= \gamma_1 * \delta_1, \\ H(s,0) &= \gamma_0(0) = \gamma_1(0), & H(s,1) &= \delta_0(1) = \delta_1(1). \end{aligned}$$

Erneut bleibt es zu zeigen, dass H stetig ist. Dies ist klar auf den Gebieten $[0,1] \times [0\frac{1}{2})$ und $[0,1] \times (\frac{1}{2}, 1]$. Es bleibt das Verhalten von H an $\left\{(s,t) \,\middle|\, t = \frac{1}{2}\right\}$ zu betrachten. Da

$$H_\gamma(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = \delta_0(0) = \delta_1(0) = H_\delta(s,0)$$

gilt, lässt sich aber zeigen, dass H überall stetig ist.

Hinweis: Die verschiedenen Objekte und Wege dieser Aufgabe sind in Abbildung 4.4 illustriert.

Publiziert am 14. März.

Einzureichen am 21. März.