Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 7

Aufgabe 7.1 Minimumprinzip und Fundamentalsatz der Algebra

(7.1a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie, dass wenn $|f|$ in $z_0 \in \Omega$ ein Minimum hat, dann $f(z_0) = 0$.

Lösung: Nehmen wir per Widerspruch an, dass $f(z_0) \neq 0$ gilt. Dann ist $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ lokal um z_0 eine wohldefinierte holomorphe Funktion. Ausserdem hat $|g|$ ein Maximum an z_0 und g ist nicht konstant. Dies ist ein Widerspruch zum Maximumprinzip.

(7.1b) Schliessen Sie aus Aufgabe (7.1a) den Fundamentalsatz der Algebra: Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ des Grades $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine Nullstelle.

Lösung: Da p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ ist gilt

$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty$$

und $|p|$ nimmt sein Minimum in $\mathbb{C}$ an. Aus Aufgabe (7.1a) folgt, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ gibt, welches $p(z_0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 7.2 Wegintegral über eine Singularität

Seien $\epsilon > 0$ und $\alpha, \phi \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie den Weg $\gamma_\epsilon : [0, 1] \to \mathbb{C}$, welcher durch

$$\gamma_\epsilon(t) := \epsilon \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t + \phi)}$$

gegeben ist und in Abbildung 7.1 dargestellt ist. Sei desweiteren $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 = 0$ und $f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einem Pol erster Ordnung an z_0. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, \mathrm{d}z = \alpha \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{Res}(f; 0)$$

gilt.

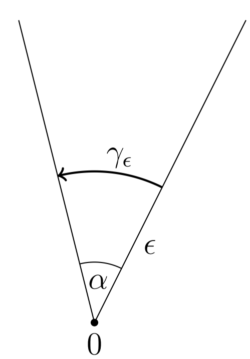

Abbildung 7.1: Der Weg γ_ϵ.

Lösung: Da f holomorph auf $U \setminus \{0\}$ ist mit Pol erster Ordnung an $z_0 = 0$, folgt dass sich f lokal in eine Laurentreihe entwickeln lässt

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^k.$$

Ist $\epsilon > 0$ nun klein genung, so entspricht f dieser Laurentreihe auf γ_ϵ und es bleibt die Integrale der Monome z^k, $k \in \mathbb{Z}$, zu berechnen. Ist $k \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\epsilon} z^k \, \mathrm{d}z &= \int_0^1 \epsilon^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\alpha t+\phi)} \cdot \mathrm{i}\epsilon\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t+\phi)} \, \mathrm{d}t = \mathrm{i}\alpha\epsilon^{k+1} \cdot \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)(\alpha t+\phi)} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\epsilon^{k+1}}{k+1} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)(\alpha+\phi)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\phi}\right),\end{aligned}$$

sodass $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} z^k \, \mathrm{d}z = 0$. Desweiteren gilt für $k = -1$

$$\int_{\gamma_\epsilon} z^{-1} \, \mathrm{d}z = \mathrm{i}\alpha.$$

Also folgt

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) \, \mathrm{d}z = \mathrm{i} \cdot \alpha \cdot a_{-1} = \alpha \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{Res}(f; 0).$$

Aufgabe 7.3 Definite Integrale

(7.3a) Seien $a, b > 0$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

i) $\int_0^\infty \frac{z^2}{z^6+1} \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{6}$,

ii) $\int_0^\infty \frac{1}{z^4+1} \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,

iii) $\int_0^\infty \frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2} \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)\mathrm{e}^{-ab}$,

iv) $\int_0^\infty \frac{z^2}{(z^2+a)^3} \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{16a\sqrt{a}}$.

Lösung:

i) Wir betrachten hier die klassischen Integrationswege $\gamma_R^{(0)}, \gamma_R^{(1)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\gamma_R^{(0)}(t) := 2Rt - R$ und $\gamma_R^{(1)}(t) := R\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}t}$. Es gilt dann[1]

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{z^2}{z^6+1} \, \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \frac{z^2}{z^6+1} \, \mathrm{d}z = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{z^2}{z^6+1} \, \mathrm{d}z$$

und

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{z^2}{z^6+1} \, \mathrm{d}z \right| \leq \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{\pi R^3}{|R^6 \mathrm{e}^{6\pi \mathrm{i}t} + 1|} \, \mathrm{d}t \leq \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R^3}{R^6 - 1} = 0.$$

Es bleibt also das Wegintegral unseres Integranden um den geschlossenen Weg $\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}$ zu berechnen. Wir tun dies mit dem Residuensatz und bemerken dazu, dass unser Integrand Pole einfacher Ordnung an den rotierten sechsten Einheitswurzeln

$$z_k := \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/6 + \pi \mathrm{i}k/3}, \qquad k = 0, \ldots, 5,$$

[1] Beachte hier, dass f eine gerade Funktion ist!

hat. Die Residuen an diesen Polen berechnen sich zu

$$\operatorname{Res}(f; z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) \cdot \frac{z^2}{z^6 + 1} = \lim_{z \to z_k} \frac{2z(z - z_k) + z^2}{6z^5} = \frac{1}{6z_k^3} = \frac{(-1)^k}{6\mathrm{i}}.$$

Nur die ersten drei Polstellen z_0, z_1, z_2 liegen in dem von $\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}$ umrandeten Gebiet, sodass der Residuensatz impliziert

$$2 \cdot \int_0^\infty \frac{z^2}{z^6 + 1} \, \mathrm{d}z = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}} \frac{z^2}{z^6 + 1} \, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \left(\frac{1}{6\mathrm{i}} - \frac{1}{6\mathrm{i}} + \frac{1}{6\mathrm{i}} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

ii) Wir benutzen die gleichen Integrationswege wie eben und erhalten

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{1}{z^4 + 1} \, \mathrm{d}z = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z^4 + 1} \, \mathrm{d}z$$

wie auch

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{1}{z^4 + 1} \, \mathrm{d}z \right| = 0.$$

Ausserdem sind die Residuen des Integranden allesamt Pole erster Ordnung und liegen an den rotierten vierten Einheitswurzeln

$$z_k := \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4 + \pi\mathrm{i}k/2}, \qquad k = 0, \ldots, 3.$$

Damit berechnen sich die Residuen also zu

$$\operatorname{Res}(f; z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) \cdot \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4z_k^3}.$$

Nur die ersten beiden Singularitäten des Integranden z_0, z_1 liegen in dem von $\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}$ umrandeten Gebiet, sodass aus dem Residuensatz

$$2 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z^4 + 1} \, \mathrm{d}z = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}} \frac{1}{z^4 + 1} \, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-9\pi\mathrm{i}/4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

folgt.

iii) Wir betrachten erneut dieselben Integrationswege und benutzen

$$2 \cdot \int_0^\infty \frac{\cos(az)}{(z^2 + b^2)^2} \, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(az)}{(z^2 + b^2)^2} \, \mathrm{d}z = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2 + b^2)^2} \, \mathrm{d}z.$$

Es gilt nun

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2 + b^2)^2} \, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2 + b^2)^2} \, \mathrm{d}z$$

und (da $a > 0$ und somit $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\right| < 1$ in der oberen Halbebene)

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2 + b^2)^2} \, \mathrm{d}z \right| \leq \lim_{R \to \infty} \int_0^1 \frac{\pi R}{\left|R^2 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t} + b^2\right|^2} \, \mathrm{d}t \leq \lim_{R \to \infty} \frac{\pi R}{R^2 - b^2} = 0.$$

Es bleibt also erneut das Wegintegral über $\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}$ zu berechnen. Die Residuen des Integranden sind Pole zweiter Ordnung und liegen an

$$z_0 = \mathrm{i}b, \qquad z_1 = -\mathrm{i}b.$$

Da nur z_0 in der oberen Halbebene liegt, reicht es

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;\mathrm{i}b) &= \lim_{z\to\mathrm{i}b}\big((z-\mathrm{i}b)^2 f(z)\big)' = \lim_{z\to\mathrm{i}b}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i}b)^2}\right)' \\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}b}\frac{\mathrm{i}a(z+\mathrm{i}b)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - 2(z+\mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i}b)^4} = \frac{(1+ab)}{4\mathrm{i}b^3}\mathrm{e}^{-ab}\end{aligned}$$

zu berechnen und dann

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}z &= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{(1+ab)}{4\mathrm{i}b^3}\mathrm{e}^{-ab} \\ &= \frac{\pi}{2b^3}(1+ab)\mathrm{e}^{-ab}\end{aligned}$$

zu schliessen.

iv) Wir benutzen ein letztes Mal die beiden Integrationswege aus Aufgabe i). Damit erhalten wir, wie zuvor

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^{(0)}}\frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,\mathrm{d}z = 2\cdot\int_0^{\infty}\frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,\mathrm{d}z$$

und

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R^{(1)}}\frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,\mathrm{d}z\right| = 0.$$

Es bleibt erneut die Residuen des Integranden zu berechnen, welcher zwei Pole dritter Ordnung an den Stellen

$$z_0 = \mathrm{i}\sqrt{a}, \qquad z_1 = -\mathrm{i}\sqrt{a}$$

hat. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;\mathrm{i}\sqrt{a}) &= \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to\mathrm{i}\sqrt{a}}\big((z-\mathrm{i}\sqrt{a})^3 f(z)\big)'' = \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to\mathrm{i}\sqrt{a}}\left(\frac{z^2}{(z+\mathrm{i}\sqrt{a})^3}\right)'' \\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}\sqrt{a}}\frac{[(z+\mathrm{i}\sqrt{a})^3 - 3z^2(z+\mathrm{i}\sqrt{a})](z+\mathrm{i}\sqrt{a})^6}{(z+\mathrm{i}\sqrt{a})^{12}} \\ &\qquad - \frac{[6z(z+\mathrm{i}\sqrt{a})^3 - 9z^2(z+\mathrm{i}\sqrt{a})^2](z+\mathrm{i}\sqrt{a})^5}{(z+\mathrm{i}\sqrt{a})^{12}} \\ &= \frac{1}{16a\sqrt{a}\mathrm{i}}\end{aligned}$$

Laut dem Residuensatz gilt also

$$2\cdot\int_0^{\infty}\frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}}\frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{16a\sqrt{a}\mathrm{i}} = \frac{\pi}{8a\sqrt{a}}.$$

(7.3b) [*Bonus*] Benutzen Sie den Residuensatz und den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher in Abbildung 7.2 gegeben ist, um die Identität

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

zu zeigen.

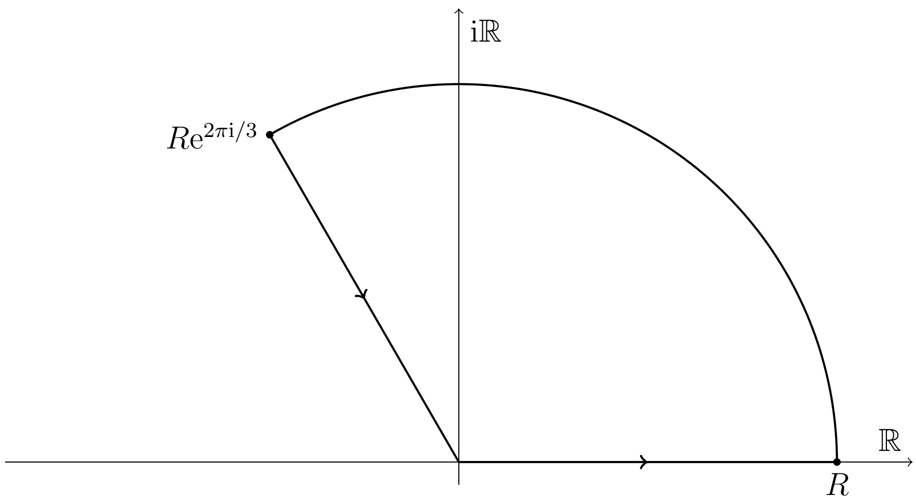

Abbildung 7.2: Der Weg γ_ϵ.

Lösung: Im Wesentlichen betrachten wir drei Integrationswege $\gamma_R^{(0)}, \gamma_R^{(1)}, \gamma_R^{(2)} : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma_R^{(0)}(t) := Rt, \qquad \gamma_R^{(1)}(t) := R\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t/3}, \qquad \gamma_R^{(2)}(t) := -R\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}t + R\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}.$$

Wir betrachten damit drei Wegintegrale und zwar

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z,$$

wie auch

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z \right| \leq \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{2\pi R}{3 \cdot |R^3\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}+1|}\,\mathrm{d}t \leq \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi R}{3\cdot(R^3-1)} = 0.$$

Zu guter Letzt, sei $-\gamma_R^{(2)}$ der Weg $\gamma_R^{(2)}$ rückwärts durchlaufen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(2)}} \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z &= -\lim_{R\to\infty} \int_{-\gamma_R^{(2)}} \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = -\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{t^3+1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}} \cdot \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)} * \gamma_R^{(2)}} \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z$$

und wir brauchen lediglich den Residuensatz anzuwenden, um unser Integral zu berechnen. Dafür sehen wir, dass nur die einfache Singularität $z_0 = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}$ innerhalb unseres Integrationsgebietes liegt. Wir berechnen das Residuum

$$\mathrm{Res;z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{3z_0^2} = \frac{1}{3\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}}$$

und erhalten damit

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}}\cdot\frac{1}{3\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 7.4 Reihenberechnung durch den Residuensatz

(7.4a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \pi\cot(\pi z) = \pi\cdot\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

und zeigen Sie, dass f die einfachen Polstellen $z_k = k$, $k\in\mathbb{Z}$, hat und dass die Residuen von f an all diesen Polstellen den Wert eins haben.

Lösung: Die Singularitäten von f liegen an den Nullstellen von $\sin(\pi z)$, welche genau $z_k = k$, $k\in\mathbb{Z}$, entsprechen. Desweiteren sind all diese Singularitäten Polstellen erster Ordnung, da

$$\lim_{z\to k}(z-k)\cdot\pi\cot(\pi z) = \pi\cos(\pi k)\cdot\lim_{z\to k}\frac{1}{(\sin(\pi z))'} = 1.$$

Eben diese Rechnung zeigt auch $\mathrm{Res}(f;k) = 1$.

(7.4b) Ziegen Sie, dass f auf dem Rand ∂Q_N des Quadrates

$$Q_N := [-(N+\tfrac{1}{2}), N+\tfrac{1}{2}]\times\mathrm{i}[-(N+\tfrac{1}{2}), N+\tfrac{1}{2}],$$

mit $N\in\mathbb{N}$, beschränkt ist durch eine obere Schranke, welche nicht von N abhängig ist.

Lösung: Sei $z\in\partial Q_N$ auf dem Rand des Quadrates Q_N. Es lässt sich dann zeigen, dass

$$|f(z)| = \pi\cdot\frac{|\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}z}|}{|\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}z}|} = \pi\cdot\frac{|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}+1|}{|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1|} \le 2\pi.$$

Betrachten wir nämlich die drei Fälle

i. $z = \pm(N+\frac{1}{2})+\mathrm{i}t$, $t\in[-(N+\frac{1}{2}), N+\frac{1}{2}]$,

ii. $z = t-(N+\frac{1}{2})\mathrm{i}$, $t\in[-(N+\frac{1}{2}), N+\frac{1}{2}]$,

iii. $z = t+(N+\frac{1}{2})\mathrm{i}$, $t\in[-(N+\frac{1}{2}), N+\frac{1}{2}]$,

so erhalten wir:

i. Es gilt

$$|f(z)| = \pi\cdot\frac{|1-\mathrm{e}^{-2\pi t}|}{|1+\mathrm{e}^{-2\pi t}|} \le \pi\cdot\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi t}}{\mathrm{e}^{-2\pi t}} = 1 & \text{wenn } t\le 0,\\ \frac{1}{1} = 1 & \text{wenn } t>0,\end{cases} = \pi \le 2\pi.$$

ii. Es gilt

$$|f(z)| = \pi \cdot \frac{\left|e^{2\pi i t} e^{2\pi N+\pi} + 1\right|}{\left|e^{2\pi i t} e^{2\pi N+\pi} - 1\right|} \leq \pi \cdot \frac{e^{2\pi N+\pi} + 1}{e^{2\pi N+\pi} - 1} \leq \pi \cdot \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} \leq 2\pi.$$

iii. Es gilt

$$|f(z)| = \pi \cdot \frac{\left|e^{2\pi i t} e^{-2\pi N-\pi} + 1\right|}{\left|e^{2\pi i t} e^{-2\pi N-\pi} - 1\right|} \leq \pi \cdot \frac{1 + e^{-2\pi N-\pi}}{1 - e^{-2\pi N-\pi}} \leq \pi \cdot \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \leq 2\pi.$$

(7.4c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2} \, dz = 0$$

gilt und folgern Sie aus dem Residuensatz die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hinweis: Die Laurententwicklung des Kotangens um $z_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \frac{2}{945} z^5 - \frac{1}{4725} z^7 - \dots$$

Lösung: Wir schätzen das Integral durch das Maximum des Integranden auf dem Integrationspfad mal die Länge des Integrationspfades[2] ab und erhalten

$$\lim_{N\to\infty} \left| \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2} \, dz \right| \leq \lim_{N\to\infty} 4(2N+1) \cdot \frac{2\pi}{(N+\frac{1}{2})^2} = 0.$$

Nun benutzen wir den Residuensatz. Dank Aufgabe wissen wir das unser Integrand einfache Pole an den Stellen $z_k = k$, $k \neq 0$, hat. Desweiteren haben wir einen dreifachen Pol an $z_0 = 0$. Das Residuum an $z_0 = 0$ berechnet sich durch

$$\begin{aligned} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} &= \frac{\pi}{z^2} \cdot \left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi^3}{45} z^3 - \frac{2\pi^5}{945} z^5 - \frac{\pi^7}{4725} z^7 - \dots \right) \\ &= z^{-3} - \frac{\pi^2}{3} z^{-1} - \frac{\pi^4}{45} z - \dots \end{aligned}$$

und hat den Wert $-\pi^2/3$. Die restlichen Residuen sind gegeben durch

$$\operatorname{Res}(f(z)/z^2; k) = \lim_{z\to k} \frac{(z-k) f(z)}{z^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \lim_{z\to k} (z-k) f(z) = \frac{1}{k^2},$$

wobei wir Aufgabe (7.4a) benutzt haben. Mit dem Residuensatz folgt nun

$$\int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2} \, dz = 2\pi i \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k^2} - \frac{\pi^2}{3} \right).$$

Lassen wir nun N gegen unendlich gehen, so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

wie erwünscht.

[2] Dies ist ganz im Allgemeinen eine Abschätzung, welche immer mal wieder nützlich sein kann.

Aufgabe 7.5 [*Bonus*] Weitere Reihen

(7.5a) Benutzen Sie Aufgabe 7.4, um die folgenden Reihen zu berechnen. Die Konstante a ist dabei so gewählt, dass die Nenner der Brüche in den Summen niemals verschwinden.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}$,

ii) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2}$,

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Lösung:

i) Wir betrachten $f(z) := \pi\cot(\pi z)$ und

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

mit derselben Abschätzung wie in Aufgabe 7.4. Wir wenden nun den Residuensatz an. Betrachten wir ein $a \in \mathbb{C}$ für welches $k^2+a^2 \neq 0$, $k \geq 1$, so hat unser Integrand Pole erster Ordnung an den Stellen $z_k^{(0)} = k$ und $z_0^{(1)} = \mathrm{i}a$, $z_1^{(1)} = -\mathrm{i}a$. Wir berechnen nun die Residuen

$$\mathrm{Res}(f(z)/(z^2+a^2);k) = \lim_{z\to k}(z-k)\frac{f(z)}{z^2+a^2} = \frac{1}{k^2+a^2}\cdot\lim_{z\to k}(z-k)f(z) = \frac{1}{k^2+a^2},$$

wobei wir Aufgabe 7.4 angewandt haben, und

$$\mathrm{Res}(f(z)/(z^2+a^2);z_k^{(1)}) = \lim_{z\to z_k^{(1)}}(z-z_k^{(1)})\frac{f(z)}{z^2+a^2} = f(z_k^{(1)})\cdot\lim_{z\to z_k^{(1)}}\frac{1}{2z} = \frac{f(z_k^{(1)})}{2z_k^{(1)}}.$$

Es folgt aus dem Residuensatz, dass

$$\int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\frac{f(\mathrm{i}a)}{2\mathrm{i}a} - \frac{f(-\mathrm{i}a)}{2\mathrm{i}a} + \frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{N}\frac{2}{k^2+a^2}\right).$$

Geht nun N gegen unendlich, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2} = -\frac{f(\mathrm{i}a)}{2\mathrm{i}a} - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{\cosh(\pi a)}{\sinh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi}{2a}\cdot\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}.$$

ii) Erneut haben wir

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\partial Q_N}\frac{f(z)}{(z+a)^2}\,\mathrm{d}z = 0,$$

und können den Residuensatz anwenden. Ist $a \in \mathbb{C}$, sodass $k + a \neq 0$, für $k \in \mathbb{Z}$, so hat unser Integrand Pole erster Ordnung an den Stellen $z_k^{(0)} = k$ und einen Pol zweiter Ordnung an $z^{(1)} = -a$. Die Residuen berechnen sich zu

$$\mathrm{Res}(f(z)/(z+a)^2;k) = \lim_{z\to k}(z-k)\frac{f(z)}{(z+a)^2} = \frac{1}{(k+a)^2}\cdot\lim_{z\to k}(z-k)f(z) = \frac{1}{(k+a)^2},$$

wobei wir Aufgabe 7.4 angewandt haben, und

$$\mathrm{Res}(f(z)/(z+a)^2;-a) = \lim_{z\to -a} f'(z) = f'(-a).$$

Es folgt aus dem Residuensatz, dass

$$\int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{(z+a)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(f'(-a) + \sum_{k=-N}^{N} \frac{2}{(k+a)^2}\right).$$

Geht nun N gegen unendlich, so gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2} = -f'(-a) = \frac{\pi^2}{\sin(\pi a)^2}.$$

iii) Erneut haben wir

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{(2z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 0,$$

und können den Residuensatz anwenden. Unser Integrand hat Pole erster Ordnung an den Stellen $z_k^{(0)} = k$ und einen Pol zweiter Ordnung an $z^{(1)} = \frac{1}{2}$. Die Residuen berechnen sich zu

$$\mathrm{Res}(f(z)/(2z-1)^2; k) = \lim_{z\to k}(z-k)\frac{f(z)}{(2z-1)^2} = \frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\lim_{z\to k}(z-k)f(z) = \frac{1}{(2k-1)^2},$$

wobei wir Aufgabe 7.4 angewandt haben, und

$$\mathrm{Res}(f(z)/(2z-1)^2; \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}\cdot\lim_{z\to 1/2} f'(z) = \frac{f'(1/2)}{4}.$$

Es folgt aus dem Residuensatz, dass

$$\int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{(2z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\frac{f'(1/2)}{4} + \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(2k-1)^2}\right).$$

Geht nun N gegen unendlich, so gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = -\frac{f'(1/2)}{4} = \frac{\pi^2}{4\sin(\pi/2)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Desweiteren ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

iv) Erneut haben wir

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^4}\,\mathrm{d}z = 0,$$

und können den Residuensatz anwenden. Unser Integrand hat Pole erster Ordnung an den Stellen $z_k = k$, für $k \neq 0$, und einen Pol fünfter Ordnung an $z_0 = 0$. Die Residuen berechnen sich zu

$$\mathrm{Res}(f(z)/z^4; k) = \lim_{z\to k}(z-k)\frac{f(z)}{z^4} = \frac{1}{k^4}\cdot\lim_{z\to k}(z-k)f(z) = \frac{1}{k^4},$$

wenn $k \neq 0$, wobei wir Aufgabe 7.4 angewandt haben, und

$$\operatorname{Res}(f(z)/z^4; 0) = -\frac{\pi^4}{45},$$

dank der Laurentreihenentwicklung des Kotangens. Es folgt aus dem Residuensatz, dass

$$\int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^4}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \left(-\frac{\pi^4}{45} + \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k^4} \right).$$

Geht nun N gegen unendlich, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(7.5b) Können Sie auch die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

berechnen?

Lösung: Auf die obige Art und Weise geht dies tatsächlich nicht, da

$$\int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{1}{k^3} = 0,$$

laut dem Residuensatz. Wir wissen generell nicht viel über die Zahl $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ auch Apéry's Konstante genannt. So ist zum Beispiel nicht klar, ob sie die Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

Tipps

Da es möglicherweise keine Übungsstunde zu diesem Blatt geben wird, folgen nun einige Tipps. Wer die Aufgaben ohne Tipps lösen will, kann die folgenden Zeilen überlesen.

[*Aufgabe 7.1*] (a) Der kurze Beweis funktioniert per Widerspruch und benutzt das Maximumprinzip. (b) Hier wendet man (a) auf ein Polynom p an.

[*Aufgabe 7.2*] Wenden Sie hier die Laurententwicklung von f um $z_0 = 0$ an. Damit kann man das Integral explizit (in Abhängigkeit von a_{-1}) berechnen.

[*Aufgabe 7.3*] (a) Betrachten Sie die Integrationswege $\gamma_R^{(0)}, \gamma_R^{(1)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\gamma_R^{(0)}(t) := 2Rt - R$ und $\gamma_R^{(1)}(t) := R\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$ und lassen Sie R gegen unendlich gehen. Eines der beiden Integral verschwindet. Dann wenden Sie den Residuensatz an. (b) Zwei von drei Teilen des hier gegebenen Integrationsweges lassen sich wie in Aufgabe (a) behandeln. Der dritte wird bis auf einen konstanten Faktor gleich aussehen, wie einer der beiden ersten.

[*Aufgabe 7.4*] (a) Diese Aufgabe ist eine absolute Standardaufgabe. Also löst sie unbedingt. Sie ist auch nicht schwer. (b) In dieser Aufgabe soll man vier (oder drei) Fälle unterscheiden, indem man die vier Randabschnitte von ∂Q_N betrachtet. Man kann so zeigen, dass $|f(z)| \leq 2\pi$. (c) Zuerst schätzt man das Integral ab. Hierzu kann man die beliebte Abschätzung

$$\left| \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \max_{t \in [0,1]} |f(\gamma(t))|$$

benutzen, wobei $\ell(\gamma)$ die Länge des Weges γ beschreibt. Hat man dies getan, so nutzt man den Residuensatz und lässt N gegen unendlich gehen.

[*Aufgabe 7.5*] (a) All diese Beispiele funktionieren gleich wie Aufgabe 7.4. Wer nicht alle lösen möchte fängt am besten von hinten an (also mit iv)) und arbeitet sich dann vor. (b) Diese Aufgabe ist beinahe unmöglich schwierig. Wer Lust hat kann es einmal versuchen, sollte aber nicht verzweifeln, wenn es nicht funktioniert.

Publiziert am 18. April.

Einzureichen am 25. April.