Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 8

Aufgabe 8.1 Die reelle Fourier Reihe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eine *reellwertige*, stetige, 2π-periodische Funktion. Wir betrachten die komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(8.1a) Leiten Sie Ausdrücke für $\operatorname{Re} c_n$ und $\operatorname{Im} c_n$ her.

Lösung: Die folgenden Rechnungen folgen sofort mit der Euler Formel:

$$\operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \cos(-nt) \, \mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \sin(-nt) \, \mathrm{d}t.$$

Benutzen wir nun noch dass der Kosinus gerade und der Sinus ungerade ist, so folgt

$$\operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Im} c_n = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t.$$

(8.1b) Isolieren Sie Real- und Imaginärteil von

$$f(t) = \hat{\hat{f}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Lösung: Wir benutzen erneut die Euler Formel, um

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} c_n \cdot \cos(nt) - \operatorname{Im} c_n \cdot \sin(nt),$$

und

$$\operatorname{Im}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} c_n \cdot \sin(nt) + \operatorname{Im} c_n \cdot \cos(nt)$$

zu schliessen. Wir können nun weitere Rechnungen anstellen basierend auf der Parität von Sinus und Kosinus. Zuerst einmal rechnen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \cos(-nt) \, \mathrm{d}t = \operatorname{Re} c_n, \\ \operatorname{Im} c_{-n} &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \sin(-nt) \, \mathrm{d}t = -\operatorname{Im} c_n. \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right] &= \operatorname{Re} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} c_n \cdot \cos(nt) + \operatorname{Re} c_{-n} \cdot \cos(-nt) \\ &\qquad - \operatorname{Im} c_n \cdot \sin(nt) - \operatorname{Im} c_{-n} \cdot \sin(-nt) \\ &= \operatorname{Re} c_0 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} c_n \cdot \cos(nt) - \operatorname{Im} c_n \cdot \sin(nt),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right] &= \operatorname{Im} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} c_n \cdot \sin(nt) + \operatorname{Re} c_{-n} \cdot \sin(-nt) \\ &\qquad + \operatorname{Im} c_n \cdot \cos(nt) + \operatorname{Im} c_{-n} \cdot \cos(-nt) \\ &= \operatorname{Im} c_0 = \operatorname{Im}\left[\int_{\mathbb{R}} f(\tau) \sin(0 \cdot \tau)\right] = 0.\end{aligned}$$

(8.1c) Zeigen Sie, dass

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt)$$

gilt, wobei

$$a_n := c_n + c_{-n}, \qquad b_n := \mathrm{i}(c_n - c_{-n}).$$

Lösung: Beginnen wir einmal damit a_n und b_n anders auszudrücken. Wir haben

$$a_n = c_n + c_{-n} = \operatorname{Re} c_n + \operatorname{Re} c_{-n} + \mathrm{i}(\operatorname{Im} c_n + \operatorname{Im} c_{-n}) = 2 \operatorname{Re} c_n,$$

und

$$b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) = \operatorname{Im} c_{-n} - \operatorname{Im} c_n + \mathrm{i}[\operatorname{Re} c_n - \operatorname{Re} c_{-n}] = -2 \operatorname{Im} c_n,$$

dank (8.1.1). Wegen Aufgabe (8.1b) haben wir

$$\begin{aligned}f(t) = \operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right] &= \operatorname{Re} c_0 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} c_n \cdot \cos(nt) - \operatorname{Im} c_n \cdot \sin(nt) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt).\end{aligned}$$

(8.1d) Zeigen Sie, dass:

i. Für alle $n \in \mathbb{Z}$, $b_n = 0$ gilt, genau dann wenn f gerade ist.

ii. Für alle $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = 0$ gilt, genau dann wenn f ungerade ist.

Lösung:

i. Ist f gerade, so folgt $f(t) = f(-t) = f(2\pi - t)$ und somit

$$\begin{aligned} b_n = -2\operatorname{Im} c_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} f(2\pi - t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \right]. \end{aligned}$$

Wir transformieren nun das zweite Integral durch $s = 2\pi - t$ und erhalten

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(2\pi - t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(s)\sin(2\pi n - ns)\,\mathrm{d}s = -\int_0^{\pi} f(s)\sin(ns)\,\mathrm{d}s,$$

sodass $b_n = 0$ gilt. Verschwinden andererseits alle b_n, so folgt aus Aufgabe (8.1c), dass

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt)$$

gerade sein muss.

ii. Isf f ungerade, so folgt $f(t) = -f(-t) = -f(2\pi - t)$ und somit

$$\begin{aligned} a_n = 2\operatorname{Re} c_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} f(2\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \right]. \end{aligned}$$

Wir transformieren nun das zweite Integral durch $s = 2\pi - t$ und erhalten

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(2\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(s)\cos(2\pi n - ns)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} f(s)\cos(ns)\,\mathrm{d}s,$$

sodass $a_n = 0$ gilt. Verschwinden andererseits alle a_n, so folgt aus Aufgabe (8.1c), dass

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nt)$$

ungerade sein muss.

Aufgabe 8.2 Berechnung einer Fourier Reihe - I

Wir betrachten die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := t, \qquad t \in [0, 2\pi),$$

und $f(t + 2\pi) = f(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

(8.2a) Zeichnen Sie den Graphen von f.

Lösung: Betrachten Sie Abbildung 8.1.

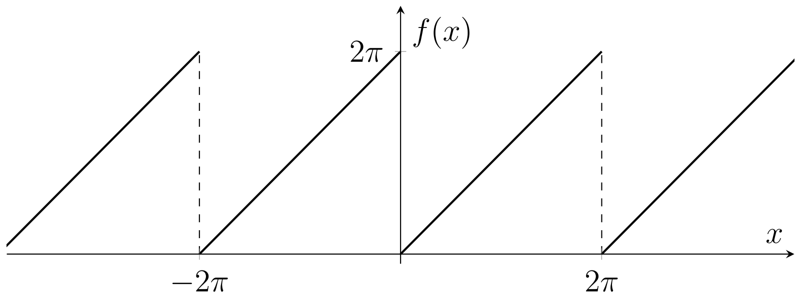

Abbildung 8.1: Der Graph von f.

(8.2b) Berechnen Sie die diskrete Fourier Transformation $\widehat{f}(n)$ von f.

Lösung: Wir berechnen für $n \neq 0$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{i}}{2\pi n} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i} n} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{n},$$

wobei wir partielle Integration angewandt haben, und

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

(8.2c) Berechnen Sie die reelle Fourier Reihe von f

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt).$$

Lösung: In Aufgabe (8.1c) hatten wir gesehen, dass

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n = \begin{cases} 2\pi & \text{wenn } n = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 0, \\ -\frac{2}{n} & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt. Damit folgt

$$\hat{\hat{f}}(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

(8.2d) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Graphen von

$$T_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt),$$

für $N = 1, 2, 5, 10, 100$, zu zeichnen.

Lösung: Wir benutzen das folgende Pythonmodul, um die Abbildung in 8.2 zu erhalten.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def main():

    # generate grid to plot on
    tt = np.linspace(-12.3, 12.3, 200)

    # compute the exact solution on the grid
    ff = tt % (2*np.pi)

    # compute the approximate solutions
    T_N = np.pi*np.ones((200,5))
    for ind, N in enumerate([1, 2, 5, 10, 100]):
        for n in range(N):

            T_N[:,ind] -= 2*np.sin((n+1)*tt)/(n+1)

    # plot the solutions
    plt.figure(figsize=(12,7))
    plt.plot(tt, ff, 'k--', label='f(t)')

    for ind, N in enumerate([1, 2, 5, 10, 100]):

        plt.plot(tt, T_N[:,ind], label='T_'+str(N)+'(t)', alpha=0.667)

    plt.legend(loc='best')
    plt.savefig('plot.png', bbox_inches='tight')

if __name__ == '__main__':
    main()
```

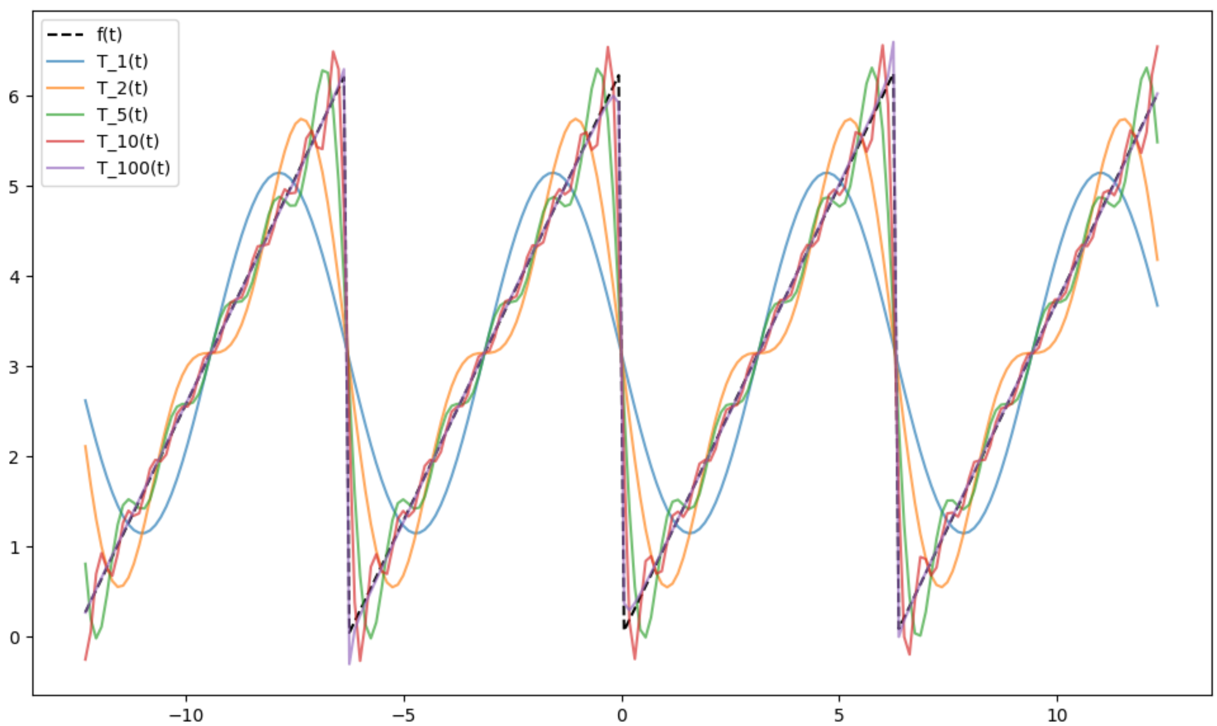

Abbildung 8.2: Die Approximationen T_N von f.

(8.2e) Berechnen Sie $\hat{\hat{f}}(0)$. Was fällt Ihnen auf?

Lösung: Wir rechnen

$$\hat{\hat{f}}(0) = \pi.$$

Dies entspricht – wie aus der Vorlesung erwartet –

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\lim_{t \to 0^+} f(t) + \lim_{t \to 0^-} f(t) \right] = \pi.$$

Aufgabe 8.3 Berechnung einer Fourier Reihe - II

Wir betrachten die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := |t|, \qquad t \in (-\pi, \pi],$$

und $f(t + 2\pi) = f(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

(8.3a) Zeichnen Sie den Graphen von f.

Lösung: Betrachten Sie Abbildung 8.3.

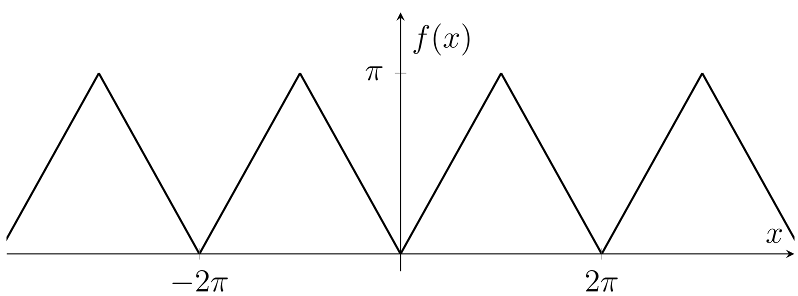

Abbildung 8.3: Der Graph von f.

(8.3b) Berechnen Sie die diskrete Fourier Transformation $\widehat{f}(n)$ von f.

Lösung: Wir berechnen für $n \neq 0$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t \right].$$

Zweiteres Integral lässt sich durch die Substitution $s = 2\pi - t$ umschreiben. Wir erhalten

$$\int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(2\pi - s)} \,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} s\mathrm{e}^{\mathrm{i}ns} \,\mathrm{d}s.$$

Nun benutzen wir partielle Integration und rechnen

$$\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{i}}{n} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\mathrm{i}n} \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi\mathrm{i}(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Also gilt

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi\mathrm{i}(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2} + \frac{\pi\mathrm{i}(-1)^n}{-n} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right] = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

Betrachten wir dies etwas genauer, so sehen wir

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2} & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu guter Letzt gilt

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_0^\pi t \,\mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - t) \,\mathrm{d}t \right] = \frac{\pi}{2}.$$

(8.3c) Berechnen Sie die reelle Fourier Reihe von f

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt).$$

Lösung: In Aufgabe (8.1c) hatten wir gesehen, dass

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n = \begin{cases} \pi & \text{wenn } n = 0, \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$b_n = -2 \operatorname{Im} c_n = 0.$$

gilt. Damit folgt

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2}.$$

(8.3d) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Graphen von

$$T_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt),$$

für $N = 1, 2, 5, 10, 100$, zu zeichnen.

Lösung: Wir benutzen das folgende Pythonmodul, um die Abbildung in 8.4 zu erhalten.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def main():

    # generate grid to plot on
    tt = np.linspace(-12.3, 12.3, 200)

    # compute the exact solution on the grid
    ff = np.abs(((tt + np.pi) % (2*np.pi)) - np.pi)

    # compute the approximate solutions
    T_N = np.pi/2*np.ones((200,5))
    for ind, N in enumerate([1, 2, 5, 10, 100]):
        for n in range(int(np.ceil(N/2))):

            T_N[:,ind] -= 4/np.pi*np.cos((2*n+1)*tt)/(2*n+1)**2

    # plot the solutions
    plt.figure(figsize=(12,7))
```

```
    plt.plot(tt, ff, 'k--', label='f(t)')

    for ind, N in enumerate([1, 2, 5, 10, 100]):

        plt.plot(tt, T_N[:,ind], label='T_'+str(N)+'(t)', alpha=0.667)

    plt.legend(loc='best')
    plt.savefig('plot.png', bbox_inches='tight')

if __name__ == '__main__':
    main()
```

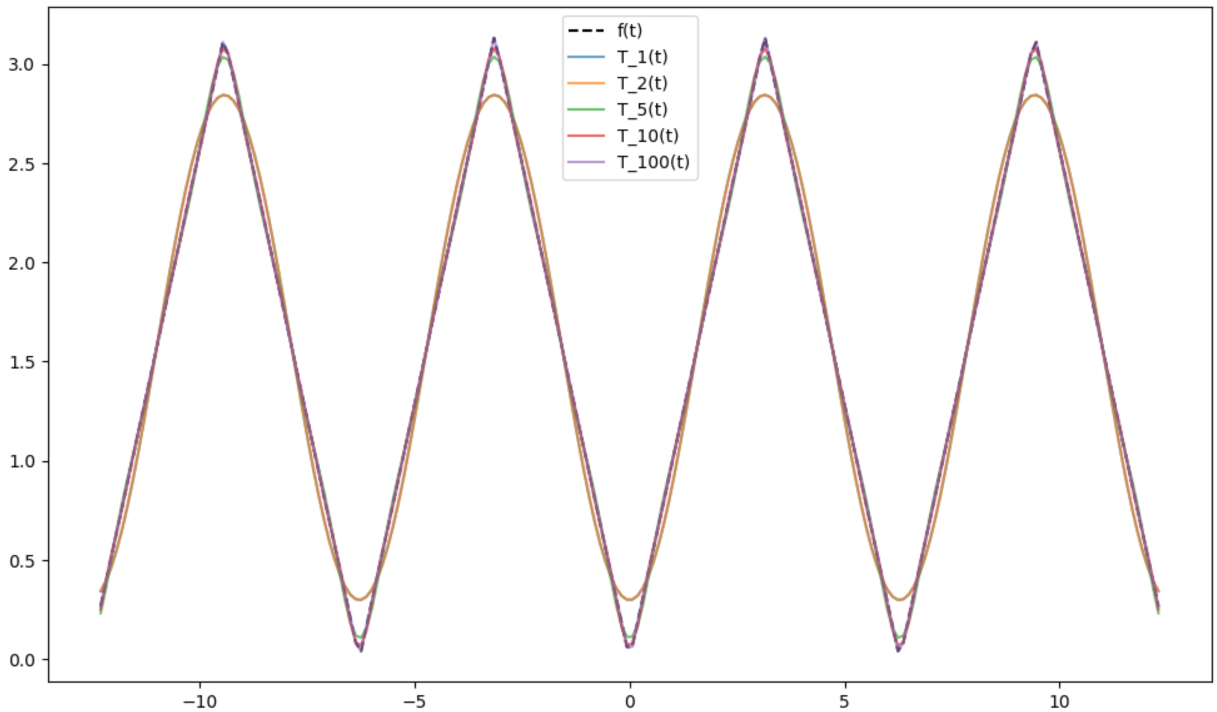

Abbildung 8.4: Die Approximationen T_N von f.

(8.3e) Berechnen Sie $\hat{\hat{f}}(0)$. Was fällt Ihnen auf?

Lösung: Wir rechnen

$$\hat{\hat{f}}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

In der letzten Serie hatten wir gesehen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Also gilt

$$\hat{\hat{f}}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dies entspricht – wie aus der Vorlesung erwartet – $f(0) = 0$.

Aufgabe 8.4 [*Bonus*] Eigenschaften der diskreten Fourier Transformation

In der Vorlesung hatten wir die diskrete Fourier Transformation einer stetigen, 2π-periodischen Funktion f eingeführt als

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Wir werden nun einige der wichtigsten Eigenschaften der Fourier Transformation beweisen.

(8.4a) Sei $\tau \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Translationsoperator T_τ definiert durch

$$\mathrm{T}_\tau[f](t) := f(t-\tau).$$

Zeigen Sie, dass

$$\widehat{\mathrm{T}_\tau[f]}(n) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau} \cdot \widehat{f}(n)$$

gilt.

Lösung: Wir rechnen direkt nach

$$\widehat{\mathrm{T}_\tau[f]}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t-\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(s) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(s+\tau)} \,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau} \cdot \widehat{f}(n),$$

wobei wir im zweiten Schritt die Substitution $s = t - \tau$ und die 2π-Periodizität von f verwendet haben.

(8.4b) Sei $\tau \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Modulationsoperator M_τ definiert durch

$$\mathrm{M}_\tau[f](t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau t} \cdot f(t).$$

In Aufgabe (8.4a) haben Sie gezeigt, dass $\widehat{\mathrm{T}_\tau[f]}(n) = \mathrm{M}_{-\tau}[\widehat{f}](n)$ gilt. Zeigen Sie nun, dass für $m \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\mathrm{M}_m[f]}(n) = \mathrm{T}_m[\widehat{f}](n)$$

gilt.

Lösung: Wir rechnen direkt nach

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{M}_m[f]}(n) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)t} \,\mathrm{d}t = \widehat{f}(n-m) \\ &= \mathrm{T}_m[\widehat{f}](n).\end{aligned}$$

(8.4c) Seien nun f und g zwei stetige, 2π-periodische Funktionen. Wir definieren die Konvolution von f und g als die Funktion

$$(f * g)(\tau) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) g(\tau - t) \,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$$

gilt

Lösung: Wir rechnen direkt nach, dass

$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (f * g)(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau} \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(\tau - t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \cdot \int_0^{2\pi} g(\tau - t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau - t)} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \cdot \widehat{g}(n) \, \mathrm{d}t = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)
\end{aligned}
$$

gilt, wobei wir im dritten Schritt die Integrationsreihenfolge vertauscht und mit Eins multipliziert haben und im vierten Schritt die Periodizität von g ausnutzen.

Publiziert am 25. April.

Einzureichen am 02. Mai.