

## Serie 9

### Aufgabe 9.1 Fourier- und Taylorkoeffizienten

(9.1a) Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Betrachten Sie die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $g(t) := f(e^{it})$ . Berechnen Sie die Fourierreihe von  $g$  in Abhängigkeit von den Taylorkoeffizienten von  $f$ . Was sind die Fourierkoeffizienten von  $g$ ?

**Lösung:** Wir erhalten die Fourierreihe

$$g(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit erfüllen die Fourierkoeffizienten  $c_n$  von  $g$  die Relation

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{wenn } n \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(9.1b) Benutzen Sie Ihre Erkenntnis aus Aufgabe (9.1a), um die Cauchysche Integralformel herzuleiten.

**Hinweis:** Die Cauchysche Integralformel besagt

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Lösung:** Die Taylorkoeffizienten von  $f$  sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Fourierkoeffizienten von  $g$  sind gegeben durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Aus Aufgabe (9.1a) folgt nun

$$\frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt,$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Das rechte Integral lässt sich nun als Wegintegral über den Weg  $\gamma(t) := e^{it}$  auffassen. Wir erhalten somit

$$\frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

was genau der Cauchyschen Integralformel entspricht.

**(9.1c)** Wir betrachten den Sinus hyperbolicus gegeben durch

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

- i. Berechnen Sie die Taylorreihe von  $\sinh(z)$  basierend auf der bekannten Reihe für die Exponentialfunktion.
- ii. Berechnen Sie die Fourierreihe von  $g(t) = \sinh(e^{it})$ .

**Lösung:**

- i. Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ist

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Damit folgt

$$\sinh(z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n - (-z)^n}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- ii. Aus Aufgabe (9.1a) wissen wir, dass

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int},$$

wobei  $a_n$  die Taylorkoeffizienten von  $\sinh$  beschreiben. Also folgt

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} e^{i(2n+1)t}.$$

**(9.1d)** [Bonus] Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Real- und Imaginärteil der trigonometrischen Polynome

$$T_N(t) := \sum_{n=0}^N c_n e^{int} \quad t \in \mathbb{R},$$

aus Aufgabe (9.1c) für  $N = 1, 3, 20$  zu zeichnen.

**Lösung:** Wir benutzen das folgende Pythonmodul, um die Abbildung in 9.1 zu erhalten.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def main():
    # generate grid to plot on
    tt = np.linspace(-12.3, 12.3, 200)

    # compute the exact solution on the grid
    gg = np.sinh(np.exp(1j*tt))
```

```

# compute the approximate solutions
T_N = np.zeros((200,3), dtype=np.complex)
for ind, N in enumerate([1, 3, 20]):
    for n in range(int(np.floor((N-1)/2))+1):

        T_N[:,ind] = (T_N[:,ind]
            + np.exp((2*n+1)*1j*tt)/np.math.factorial(2*n+1))

# plot the real part
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.plot(tt, np.real(gg), 'k--', label='f(t)')

for ind, N in enumerate([1, 3, 20]):

    plt.plot(tt, np.real(T_N[:,ind]), label='T_' + str(N) + '(t)', alpha=0.667)

plt.legend(loc='best')
plt.savefig('real.png', bbox_inches='tight')

# plot the imaginary part
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.plot(tt, np.imag(gg), 'k--', label='f(t)')

for ind, N in enumerate([1, 3, 20]):

    plt.plot(tt, np.imag(T_N[:,ind]), label='T_' + str(N) + '(t)', alpha=0.667)

plt.legend(loc='best')
plt.savefig('imag.png', bbox_inches='tight')

if __name__ == '__main__':
    main()

```

Es fällt dabei auf, dass die Fourierreihe von  $g$  enorm schnell gegen  $g$  konvergiert. Insbesondere ist  $T_3$  schon fast identisch mit  $g$ .

## Aufgabe 9.2 Ein Cauchy Hauptwert

Seien  $a < b \in \mathbb{R}$ . Das Ziel dieser Aufgabe ist es

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{-is(a-t)} - e^{-is(b-t)}}{s} ds$$

zu berechnen.

**(9.2a)** Zeigen Sie

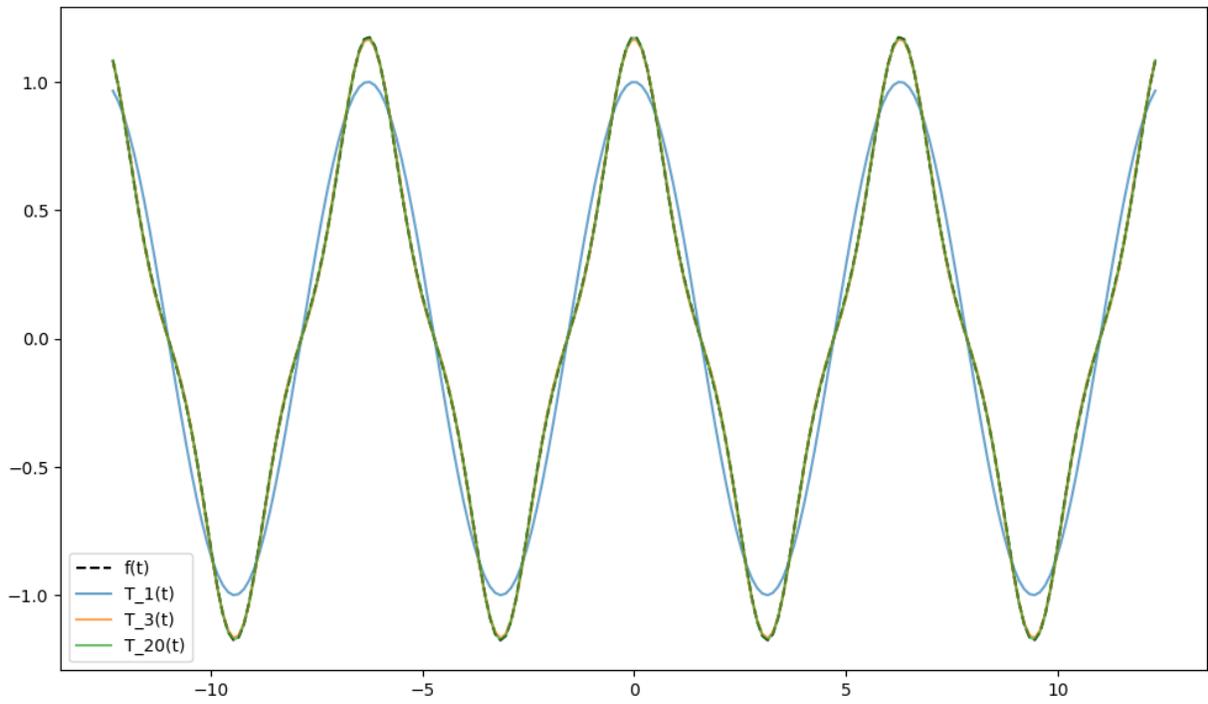
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i.$$

Benutzen Sie dazu den Integralsatz von Cauchy und den Weg  $\gamma$ , welcher in Abbildung 9.2 gezeichnet ist.

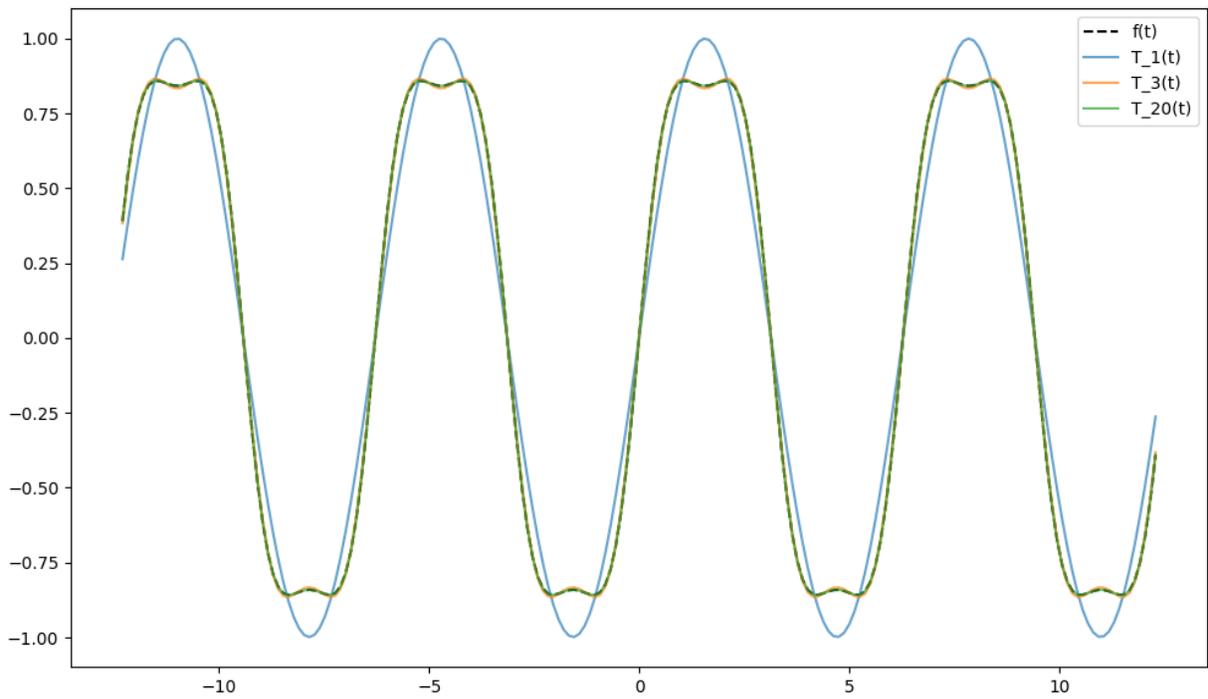
**Hinweis:** In Serie 7 hatten wir gesehen, dass

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\gamma_s} f(z) dz = \pi i \cdot \text{Res}(f; 0)$$

gilt, wenn  $\gamma_s$  das in Abbildung 9.2 eingezeichnete Wegstück von  $\gamma$  ist und  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit Pol erster Ordnung an  $z_0 = 0$  ist. Ausserdem wird es hilfreich sein, die Abschätzung  $\sin(\pi t) \geq 2t$ ,  $t \in [0, 1/2]$ , zu verwenden.



(a) Der Realteil von  $T_N$ .



(b) Der Imaginärteil von  $T_N$ .

Abbildung 9.1

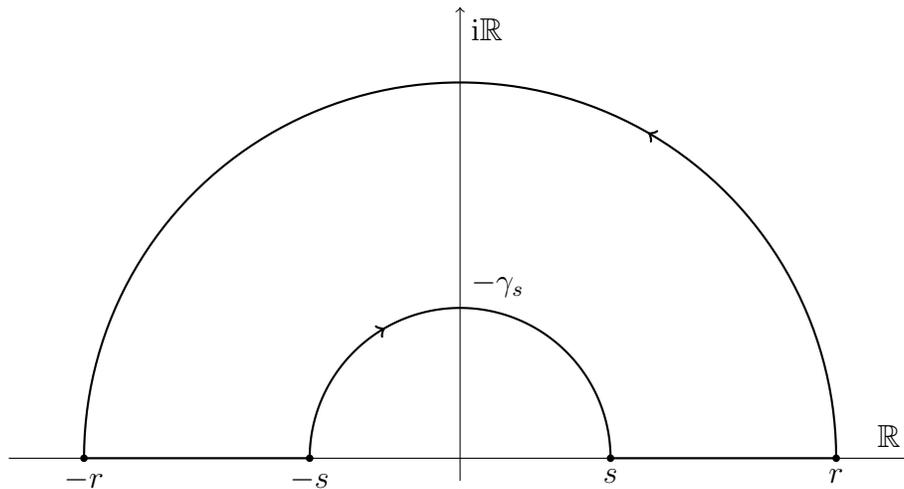


Abbildung 9.2: Der Weg  $\gamma$  mit Wegstück  $\gamma_s$ .

**Lösung:** Laut dem Integralsatz von Cauchy gilt

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

da der Integrand holomorph ist auf dem von  $\gamma$  eingeschlossenen Gebiet. Zerlegen wir das Integral nun in einzelne Wegstücke, so haben wir

$$\int_{-r}^{-s} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_s^r \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\gamma_s} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

wobei  $\gamma_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben ist durch  $\gamma_r(t) := re^{\pi it}$ . Mit dem Hinweis folgern wir

$$\int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \int_{-r}^{-s} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_s^r \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\gamma_s} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i - \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

da

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}; 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} e^{iz} = 1.$$

Wir zeigen nun, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

gilt. Wir rechnen dazu

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^1 \frac{e^{ire^{\pi it}}}{re^{\pi it}} \cdot \pi ire^{\pi it} dz \right| = \pi \cdot \left| \int_0^1 e^{ire^{\pi it}} dz \right| \\ &\leq \pi \cdot \int_0^1 e^{-r \sin(\pi t)} dt = 2\pi \cdot \int_0^{1/2} e^{-r \sin(\pi t)} dt, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie des Sinus an der Achse  $t = 1/2$  verwendet haben. Es gilt nun  $\sin(\pi t) \geq 2t$ ,  $t \in [0, 1/2]$ , und damit

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq 2\pi \cdot \int_0^{1/2} e^{-2rt} dt = \frac{\pi}{r} \cdot (1 - e^{-r}).$$

Da dies gegen null konvergiert, wenn  $r \rightarrow \infty$ , folgt unsere obige Aussage. Ausserdem gilt also

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i,$$

wie behauptet.

**(9.2b)** Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{-is(a-t)}}{s} ds = \begin{cases} 1/2 & \text{wenn } a < t, \\ 0 & \text{wenn } a = t, \\ -1/2 & \text{wenn } a > t. \end{cases}$$

**Lösung:** Im ersten Schritt werden wir die Substitution  $x = -s(a-t)$  verwenden. Wir erhalten damit

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{-is(a-t)}}{s} ds = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R(a-t)}^{R(a-t)} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

Im Folgenden unterscheiden wir die Fälle  $a < t$ ,  $a = t$  und  $a > t$ .

[ $a < t$ ] Ist  $a < t$ , so gilt

$$-\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R(a-t)}^{R(a-t)} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2},$$

laut Aufgabe (9.2a).

[ $a = t$ ] Ist  $a = t$ , so verschwindet unser Integral, für alle  $R > 0$ , und somit ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{-is(a-t)}}{s} ds = 0.$$

[ $a > t$ ] Ist  $a > t$ , so gilt

$$-\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R(a-t)}^{R(a-t)} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = -\frac{1}{2}.$$

**(9.2c)** Folgern Sie nun, dass

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{-is(a-t)} - e^{-is(b-t)}}{s} ds = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t < a, \\ 1/2 & \text{wenn } t = a, \\ 1 & \text{wenn } a < t < b, \\ 1/2 & \text{wenn } t = b, \\ 0 & \text{wenn } t > b. \end{cases}$$

**Lösung:** Ähnlich wie in Aufgabe (9.2b) lässt sich zeigen, dass

$$-\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{-is(b-t)}}{s} ds = \begin{cases} -1/2 & \text{wenn } b < t, \\ 0 & \text{wenn } b = t, \\ 1/2 & \text{wenn } b > t. \end{cases}$$

Summieren wir dies nun mit dem Ausdruck aus Aufgabe (9.2b), so erhalten wir

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{-is(a-t)} - e^{-is(b-t)}}{s} ds = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t < a, \\ 1/2 & \text{wenn } t = a, \\ 1 & \text{wenn } a < t < b, \\ 1/2 & \text{wenn } t = b, \\ 0 & \text{wenn } t > b. \end{cases}$$

### Aufgabe 9.3 Bestapproximation im Raum der trig. Polynome

Sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion mit Fourierkoeffizienten  $c_n$ . Betrachten Sie die partielle Fourierreihe

$$T_N(t) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei  $N \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $p$  ein allgemeines trigonometrisches Polynom vom Grad  $N$ , d.h.

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N p_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit  $p_n \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass

$$\|f - T_N\| \leq \|f - p\|.$$

**Hinweis:** Man braucht hier lediglich Erkenntnisse aus der lineare Algebra anzuwenden. Betrachten Sie insbesondere das Skalarprodukt

$$(f, g) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

**Lösung:** Wir betrachten

$$\begin{aligned} \|f - T_N\|^2 - \|f - p\|^2 &= (f - T_N, f - T_N) - (f - p, f - p) \\ &= \|f\|^2 - 2 \operatorname{Re}(f, T_N) + \|T_N\|^2 - \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f, p) - \|p\|^2 \\ &= -2 \operatorname{Re}(f, T_N) + \|T_N\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f, p) - \|p\|^2 \end{aligned}$$

Sei nun  $\chi_n(t) := e^{int}$ , so folgt

$$(f, T_N) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \chi_n, \sum_{k=-N}^N c_k \chi_k \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-N}^N c_n \overline{c_k} (\chi_n, \chi_k).$$

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die  $\chi_n$  orthogonal zueinander stehen. Ausserdem gilt  $\|\chi_n\| = 1$ . Also

$$(f, T_N) = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.$$

Auf dieselbe Art und Weise sehen wir

$$\|T_N\|^2 = (T_N, T_N) = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = (f, T_N).$$

Es ist somit

$$\|f - T_N\|^2 - \|f - p\|^2 = -\|T_N\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f, p) - \|p\|^2.$$

Da  $p$  die Form

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N p_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R},$$

hat folgt desweiteren

$$(f, p) = \sum_{n=-N}^N c_n \overline{p_n} = (T_N, p),$$

was wiederum

$$\|f - T_N\|^2 - \|f - p\|^2 = -\|T_N\|^2 + 2 \operatorname{Re}(T_N, p) - \|p\|^2 = -\|T_N - p\|^2 \leq 0$$

impliziert. Die Behauptung folgt nun nachdem wir mit  $\|f - p\|^2$  addiert haben.

## Aufgabe 9.4 [Bonus] Die Haar Transformation

In<sup>1</sup> der Theorie der Reihenentwicklung reell- oder komplexwertiger Funktionen spielen die sogenannten *orthogonalen Funktionensysteme* eine führende Rolle. Man versteht darunter üblicherweise ein System unendlich vieler Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  auf einem Intervall  $I$ , typischerweise  $I = [0, 2\pi]$  oder  $I = [0, 1]$ , die die Orthonormalitätseigenschaft

$$\int_I \varphi_p(t) \overline{\varphi_q(t)} dt = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = q, \\ 0 & \text{falls } p \neq q, \end{cases}$$

besitzen. In der klassischen Fourieranalyse  $2\pi$ -periodischer komplexwertiger Funktionen betrachten wir das orthogonale Funktionensystem  $\{\dots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots\}$  mit  $e_n(t) = e^{int}$ . Für reellwertige  $2\pi$ -periodische Funktionen eignet sich das orthogonale Funktionensystem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(t), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \dots$$

gut. Der Einfachheit halber betrachten wir im folgenden nur reellwertige Funktionen auf dem Intervall  $I = [0, 1]$ , und nehmen stillschweigend an dass alle Funktionen stückweise stetig und beschränkt sind. Sei  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  ein beliebiges orthogonales Funktionensystem. Für jede Funktion  $f$  auf  $I$  können wir nun Fourierkoeffizienten

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle := \int_0^1 f(t) \varphi_n(t) dt$$

definieren. Die formal gebildete unendliche Reihe

$$c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + c_3 \varphi_3(t) + \dots \tag{9.4.1}$$

<sup>1</sup>Frei nach: A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Göttinger Inauguraldissertation (1909) und gleichnamigem Artikel in: *Mathematische Annalen*, **69** (3): 331–371, (1910)

nennen wir *Fourier Reihe* von  $f$  in Bezug auf das gegebene orthogonale Funktionensystem. Das orthogonale Funktionensystem wird *vollständig* genannt, falls für jede Funktion  $f$  die Relation

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

gilt. Im klassischen Fall läuft das auf den Satz von Parseval hinaus, der in diesem Sinne besagt dass das orthogonale Funktionensystem  $\{\dots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots\}$  vollständig ist. Ein allgemeiner Satz aus der Theorie der topologischen Vektorräume besagt, dass die Fourier Reihe (9.4.1) bezüglich eines orthogonalen Funktionensystems in einer gewissen Weise (*caveat emptor*) gegen  $f$  konvergiert.

Wir beschreiben nun ein bestimmtes orthogonales Funktionensystem  $\chi$ , bestehend aus reellwertigen Funktionen

$$\chi_0, \chi_{1,1}, \chi_{2,1}, \chi_{2,2}, \chi_{3,1}, \dots, \chi_{n,k}, \dots$$

für allgemeine Indizes  $n \geq 1$  und  $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ . Dieses System wurde zum ersten Mal in den bereits erwähnten Arbeiten von Alfréd Haar eingeführt. Es spielt heute in der Theorie der Wavelets eine zentrale Rolle. Es sei  $\chi_0 = 1$  im ganzen Intervall  $I = [0, 1]$ , und sei

$$\chi_1(t) = \begin{cases} +1 & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Wir setzen ferner

$$\chi_{2,1}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ -\sqrt{2} & \text{falls } \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{falls } \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \chi_{2,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}, \\ -\sqrt{2} & \text{falls } \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

und allgemein definieren wir  $\chi_{n,k}$  für  $n \geq 2$  und  $1 \leq k \leq 2^{n-1}$  wie folgt: Wir teilen das Intervall  $[0, 1]$  in  $2^n$  gleiche Teile, und bezeichnen diese der Reihe nach mit  $I_{n,1}, I_{n,2}, \dots, I_{n,2^n}$ . Dann setzen wir

$$\chi_{n,k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^{n-1}} & \text{falls } t \text{ im Intervall } I_{n,(2k-1)}, \\ -\sqrt{2^{n-1}} & \text{falls } t \text{ im Intervall } I_{n,2k}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle  $n \geq 2$  und alle  $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ .

**(9.4a)** Zeigen Sie, dass die Funktionen  $\chi_0, \chi_1, \chi_{2,1}, \chi_{2,2}, \dots, \chi_{n,k}, \dots$  ein orthogonales Funktionensystem bilden.

**(9.4b)** Zeigen Sie, dass das orthogonale Funktionensystem  $\chi$  vollständig ist.

**Hinweis:** Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, stückweise stetig und beschränkt, und

$$c_{n,k} := \int_0^1 f(t) \chi_{n,k}(t) dt \tag{9.4.2}$$

für alle  $n$  und  $k$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen dass es genügt anzunehmen dass  $c_{n,k} = 0$  für alle  $n$  und  $k$  gilt, um daraus  $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$  zu folgern. Anschliessend betrachten

Sie zu diesem Zweck die Stammfunktion  $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ . Das ist eine stetige Funktion mit  $F(0) = 0$ . Aus 9.4.2 erhält man nun

$$F(1) = 0, F\left(\frac{1}{2}\right) = 0, F\left(\frac{1}{4}\right) = 0, F\left(\frac{3}{4}\right) = 0, \dots$$

und induktiv  $F(d2^{-n}) = 0$ , für jeden Dualbruch  $d2^{-n}$  mit  $n \geq 0$  und  $0 \leq d \leq 2^n$ . Es folgt  $F = 0$ , und daraus erhält man leicht  $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$ .

**(9.4c)** Sei  $f(t) = \sin(2\pi t)$ . Berechnen Sie mit Maschinenhilfe  $c_{n,k}$  für  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  und alle möglichen  $k$  die Fourierkoeffizienten  $c_{n,k}$  und zeichnen Sie den Graphen der Teilsumme

$$f_4(t) = c_0\chi_0(t) + c_{1,1}\chi_{1,1}(t) + c_{1,2}\chi_{1,2}(t) + \dots + c_{4,8}\chi_{4,8}(t).$$

Experimentieren Sie nach Belieben mit weiteren Funktionen  $f$  und grösseren Teilsummen.

Stichworte für Internet Recherche: Haar Transformation, Haar Wavelet, discrete Wavelet transform.

Publiziert am 02. April.

Einzureichen am 09. Mai.