Mathematik I (BIOL, HEST, PHAR) HS 2018
Prof. W. Farkas

Lösungsvorschläge zur Serie 11

Aufgabe 1

Wir gehen für die Bestimmung des Konvergenzbereichs der Potenzreihe wie in der Vorlesung vor. Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ berechnen wir als erstes den Konvergenzradius r mit der Formel $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Dann wissen wir, dass das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ sicher Teil des Konvergenzbereiches ist. Danach fehlt nur noch, die Konvergenz der Reihe für die Randpunkte $x_0 - r$ und $x_0 + r$ des Intervalls zu kontrollieren. Diese sind evtl. auch im Konvergenzbereich.

(a) Hier ist $x_0 = -2$ und $c_n = n$ und es gilt

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Das heisst, das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r) = (-3, -1)$ ist sicher Teil des Konvergenzbereichs. Für die Randpunkte gilt:

$$\begin{aligned} &\text{falls } x = -3, \text{ dann ist die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n, \text{ also divergent} \\ &\text{falls } x = -1, \text{ dann ist die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} n, \text{ also divergent,} \end{aligned}$$

da beide Male die Glieder der Reihe nicht nach Null konvergieren. Der Konvergenzbereich ist somit das Intervall $(-3, -1)$.

(b) Hier ist $x_0 = 0$ und $c_n = \frac{n+1}{n!}$ und es gilt

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n+2} = \infty.$$

Der Konvergenzradius ist somit unendlich und der Konvergenzbereich damit ganz $\mathbb{R}$.

(c) Hier ist $x_0 = 0$ und $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und es gilt

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Das heisst, das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r) = (-1, 1)$ ist sicher Teil des Konvergenzbereichs. Für die Randpunkte gilt:

$$\text{falls } x = -1, \text{ dann ist die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ also divergent (harmonische Reihe)}$$

$$\text{falls } x = 1, \text{ dann ist die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \text{ also konvergent (alternierende Reihe).}$$

Der Konvergenzbereich ist somit das Intervall $(-1, 1]$.

(d) Die Potenzreihe ist umgeschrieben gleich $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n (x-1)^n$. Also ist hier $x_0 = 1$ und $c_n = (-\frac{1}{5})^n$ und es gilt

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{5})^n}{(\frac{1}{5})^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5.$$

Das heisst, das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r) = (-4, 6)$ ist sicher Teil des Konvergenzbereichs. Für die Randpunkte gilt:

$$\text{falls } x = -4, \text{ dann ist die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} 1^n, \text{ also divergent}$$

$$\text{falls } x = 6, \text{ dann ist die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n, \text{ also divergent.}$$

Der Konvergenzbereich ist somit das Intervall $(-4, 6)$.

(e) Hier ist $x_0 = 0$ und $c_n = \frac{2^n \ln(n)}{n!}$ und es gilt

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{2^n \ln(n)}{n!}}{\frac{2^{n+1} \ln(n+1)}{(n+1)!}} = \frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} (n+1).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite geht für $n \to \infty$ intuitiv gegen unendlich, da der Bruch mit den Logarithmen gegen 1 gehen sollte (ähnlich wie das auch für z.B. $\frac{n}{n+1}$ gilt) und die Klammer $(n+1)$ gegen unendlich. Wie zeigen wir das formal und sauber?

Eine erste Idee (**funktioniert nicht!**) wäre l'Hôpital anzuwenden, wir haben ja einen Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$. Nach Anwendung von l'Hôpital können wir den Grenzwert zwar direkt ausrechnen und erhalten ∞, **aber**: Eine der Voraussetzungen von l'Hôpital ist, dass der Grenzwert mit den Ableitungen existieren muss!! L'Hôpital darf hier also gar **nicht** angewendet werden.

Die zweite Möglichkeit ist, eine andere (einfachere) Folge zu finden, die immer kleiner als die Folge $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ ist und bei der wir sofort sehen, dass sie Grenzwert unendlich hat. Dann muss auch die Folge $\frac{c_n}{c_{n+1}}$, die ja immer grösser ist, gegen unendlich gehen. Zum Beispiel gilt

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} (n+1) \overset{(*)}{\geq} \frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{\ln(n^2)} (n+1) \overset{(**)}{=} \frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{2\ln(n)} (n+1) = \frac{1}{4} (n+1),$$

wobei $(*)$ wegen $\ln(n+1) \leq \ln(n^2)$ (da der Logarithmus monoton wachsend ist) und $(**)$ mit den Logarithmengesetzen folgt. Somit folgt

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}(n+1) = \infty.$$

Der Konvergenzradius ist somit unendlich und der Konvergenzbereich damit ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Die Taylor-Reihe einer Funktion f um einen Entwicklungspunkt x_0 ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \qquad \text{wobei } c_0 = f(x_0) \text{ und } c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ für } n \geq 1.$$

Hier bezeichnet $f^{(n)}$ die n-te Ableitung der Funktion f. Der Entwicklungspunkt ist in den Teilaufgaben gegeben. Es bleibt die Ableitungen zu berechnen.

(a) Die Ableitungen der Sinusfunktion sind

$$\sin'(x) = \cos(x),\ \sin''(x) = -\sin(x),\ \sin^{(3)}(x) = -\cos(x),\ \sin^{(4)}(x) = \sin(x),\ \ldots$$

Somit sind die Koeffizienten der Taylor-Reihe

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{-1}{3!},\ c_4 = 0,\ c_5 = \frac{1}{5!},\ \ldots$$

Die Taylor-Reihe der Sinusfunktion um den Punkt $x_0 = 0$ lautet also

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(b) Ähnlich wie in Teilaufgabe (a) folgt, dass die Koeffizienten der Taylor-Reihe der Kosinusfunktion

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = \frac{-1}{2!},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1}{4!},\ c_5 = 0,\ \ldots$$

sind. Die Taylor-Reihe der Kosinusfunktion um den Punkt $x_0 = 0$ lautet also

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

(c) Die Ableitungen von $f(x) = e^{-x}$ sind

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & n \text{ ungerade} \\ e^{-x}, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also sind die Koeffizienten $c_0 = f(0) = 1$ und für $n \geq 1$ sonst

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

und die gesuchte Taylor-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n,$$

da auch der erste Koeffizient als $c_0 = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$ geschrieben werden kann.

(d) Die Ableitungen von $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ sind $f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-1-n}$. Somit sind die Koeffizienten der Taylor-Reihe $c_0 = f(0) = 1$ und für $n \geq 1$ sonst

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$$

und die gesuchte Taylor-Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

(e) Die Ableitungen von $f(x) = \ln(1+x)$ sind

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4},\ \ldots$$

Zusammengefasst ist die n-te Ableitung gleich

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Also sind die Koeffizienten $c_0 = f(0) = 0$ und für $n \geq 1$ sonst

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

und die gesuchte Taylor-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

(f) Die Ableitungen von $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ sind

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2},\ f''(x) = \frac{2 \cdot 3}{x^4} - \frac{2 \cdot 2}{x^3},\ f^{(3)}(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{x^4},\ \ldots$$

Zusammengefasst ist die n-te Ableitung der Funktion

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\frac{(n+1)!}{x^{n+2}} - \frac{2 \cdot n!}{x^{n+1}} \right).$$

Also sind die Koeffizienten $c_0 = f(1) = -1$ und für $n \geq 1$ sonst

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n \frac{(n+1)! - 2 \cdot n!}{n!} = (-1)^n (n+1-2) = (-1)^n (n-1)$$

und die gesuchte Taylor-Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n-1)(x-1)^n,$$

da auch der erste Koeffizient als $c_0 = -1 = (-1)^0(0-1)$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 3

Das Taylor-Polynom dritten Grades einer Funktion um einen Entwicklungspunkt x_0 ist

$$p(x) = \sum_{n=0}^{3} c_n (x - x_0)^n \qquad \text{wobei } c_0 = f(x_0) \text{ und } c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ sonst } n \geq 1.$$

Die ersten drei Ableitungen von $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \\ f''(x) &= -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{10}{27} x^{-\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

Es folgt für die Koeffizienten

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = \frac{1}{3}, \qquad c_2 = -\frac{2}{9 \cdot 2!}, \qquad c_3 = \frac{10}{27 \cdot 3!}.$$

Das zu f gehörige Taylor-Polynom dritten Grades lautet demnach

$$p(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3.$$

Für x-Werte in der Nähe von $x_0 = 1$ gilt $f(x) \approx p(x)$. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} p(0.7) &= 1 + \frac{1}{3}(0.7-1) - \frac{1}{9}(0.7-1)^2 + \frac{5}{81}(0.7-1)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1000} = 0.888333\ldots. \end{aligned}$$

Also ist näherungsweise $\sqrt[3]{0.7} = f(0.7) \approx p(0.7) = 0.888333\ldots$. Zum Vergleich: Der genaue Wert von $\sqrt[3]{0.7}$ ist

$$\sqrt[3]{0.7} = 0.887904\ldots.$$

Aufgabe 4

Gesucht sind die Taylor-Polynome vom Grad 1, 2 und 3 der Funktion $f(x) = xe^{-x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, also

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{k} c_n x^n \qquad \text{wobei } c_0 = f(0) \text{ und } c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ sonst } n \geq 1$$

für $k = 1, 2, 3$.

Wir benötigen somit die ersten drei Ableitungen von f, welche

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \\ f''(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x} \\ f^{(3)}(x) &= e^{-x} - (x-2)e^{-x} = (3-x)e^{-x} \end{aligned}$$

sind. Es folgt

$$c_0 = 0, \qquad c_1 = 1, \qquad c_2 = -1, \qquad c_3 = \frac{1}{2}.$$

Die drei gesuchten Polynome vom Grad 1, 2, 3 von f sind somit

$$\begin{aligned} p_1(x) &= c_0 + c_1 x = x \\ p_2(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = x - x^2 \\ p_3(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

Wir sehen anhand der Graphen, dass die Approximation von f (in der Umgebung von 0) durch die Taylor-Polynome mit steigendem Grad der Polynome besser wird.

Out[14]=