# Lösungsvorschläge zur Serie 13

## Aufgabe 1

(a) Wir rechnen nacheinander vom innersten zum äussersten Bruch:

$$2i + \frac{1}{3i+1} = 2i + \frac{-3i+1}{(3i+1)(-3i+1)} = 2i + \frac{1-3i}{1-9i^2} = 2i + \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$$

$$\Longrightarrow \quad i + \frac{1}{2i + \frac{1}{3i+1}} = i + \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{17}{10}i} = i + \frac{10}{1+17i} = i + \frac{10(1-17i)}{(1+17i)(1-17i)} = i + \frac{10(1-17i)}{1-17^2 i^2}$$

$$= i + \frac{10-170i}{290} = i + \frac{1-17i}{29} = \frac{1}{29} + \frac{12}{29}i$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{1}{i + \frac{1}{2i+\frac{1}{3i+1}}} = \frac{1}{\frac{1}{29} + \frac{12}{29}i} = \frac{29}{1+12i} = \frac{29(1-12i)}{(1+12i)(1-12i)} = \frac{29(1-12i)}{1-12^2 i^2}$$

$$= \frac{29(1-12i)}{145} = \frac{1-12i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{12}{5}i$$

(b) Umgeformt in exponentielle Darstellung ist $1-\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} z = \big(1-\sqrt{3}i\big)^{10} &= (2e^{i\frac{5}{3}\pi})^{10} = 2^{10}e^{i\frac{50}{3}\pi} \\ &= 2^{10}\big(\cos\big(\tfrac{50\pi}{3}\big) + i\sin\big(\tfrac{50\pi}{3}\big)\big) \\ &= 2^{10}\big(\cos\big(\tfrac{2\pi}{3}\big) + i\sin\big(\tfrac{2\pi}{3}\big)\big) = 2^{10}\big(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big) \\ &= -2^9 + i\cdot 2^9\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

(c) Umgeformt in exponentielle Darstellung ist $1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} z = \big(1-i\big)^{-8} &= (\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}})^{-8} = (\sqrt{2})^{-8}e^{-i\frac{56\pi}{4}} \\ &= \tfrac{1}{2^4}\big(\cos\big(\tfrac{-56\pi}{4}\big) + i\sin\big(\tfrac{-56\pi}{4}\big)\big) = \tfrac{1}{2^4}\big(\cos\big(-14\pi\big) + i\sin\big(-14\pi\big)\big) \\ &= \tfrac{1}{2^4}\big(\cos\big(0\big) + i\sin\big(0\big)\big) = \tfrac{1}{16}. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

(a) Mit den gegebenen Informationen können wir die trigonometrische Darstellung bzw. Exponentialdarstellung von $z$ einfach finden. Aus $\frac{1}{|z|^2} = 2$

folgt $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und aus $\arg(z^*) = \frac{3\pi}{4}$ folgt $\arg(z) = 2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Somit gilt $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5}{4}\pi}$ oder in trigonometrische Darstellung

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{5}{4}\pi\Big) + i\sin\Big(\frac{5}{4}\pi\Big)\Big).$$

Daraus finden wir die kartesische Darstellung direkt

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{5}{4}\pi\Big) + i\sin\Big(\frac{5}{4}\pi\Big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

und somit $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ und $\mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}$.

(b) Wieder versuchen wir zunächst, die Exponentialdarstellung von $z$ zu bestimmen. Den Betrag von $z$ finden wir mit der ersten Bedingung $\sqrt{2} = |iz| = |i||z| = |z|$. Es gilt also $z = \sqrt{2}e^{i\varphi}$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$. Damit ist $z^* = \sqrt{2}e^{i(2\pi-\varphi)}$ und somit $(z^*)^2 = 2e^{2i(2\pi-\varphi)}$. Die zweite Bedingung ist also

$$\begin{aligned} 2 &= \mathrm{Im}((z^*)^2) = \mathrm{Im}\big(2e^{2i(2\pi-\varphi)}\big) = \mathrm{Im}\big(2(\cos(4\pi - 2\varphi) + i\sin(4\pi - 2\varphi))\big) \\ &= 2\sin(4\pi - 2\varphi)). \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus die Bedingung $\sin(4\pi - 2\varphi) = 1$. Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $4\pi - 2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist.

Damit erfüllen alle $\varphi = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ die geforderte Bedingung. Da $\varphi \in [0, 2\pi)$ haben wir also die zwei Möglichkeiten $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Es folgt

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad \text{oder} \qquad z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Mit der Umrechnung $re^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ folgt

$$z = -1 + i \quad \text{oder} \quad z = 1 - i$$

und somit $\mathrm{Re}(z) = -1$ und $\mathrm{Im}(z) = 1$ oder $\mathrm{Re}(z) = 1$ und $\mathrm{Im}(z) = -1$.

## Aufgabe 3

(a) Setzen wir den Ansatz $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in die gegebene Gleichung $4zz^* + (z - z^*)^2 = 1$ ein, erhalten wir wegen $z^* = x - iy$, dass

$$4(x^2 + y^2) - 4y^2 = 1.$$

Es folgt $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$. Die Wahl von $y$ ist beliebig. Es ist also $z = \frac{1}{2} + iy$ oder $z = -\frac{1}{2} + iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ beliebig.

(b) Als erstes schreiben wir $z^2$ in exponentieller Darstellung

$$z^2 = -8 + i8\sqrt{3} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

und suchen zuerst die Lösungen $z$ dieser Gleichung in exponentieller Darstellung. Falls $z = re^{i\varphi}$, dann ist $z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$. Gesucht sind also $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$r^2 e^{2i\varphi} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Daraus folgt $r = 4$ und dass $2\varphi$ bis auf Vielfache von $2\pi$ gleich $\frac{2\pi}{3}$ ist. Das bedeutet $2\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und somit $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi k$. Setzen wir verschiedene $k \in \mathbb{Z}$ ein, sehen wir, dass die möglichen $\varphi \in [0, 2\pi)$ gleich $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ sind. Es folgt

$$z = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\Big(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\Big) = 2 + i2\sqrt{3}$$

oder

$$z = 4e^{i\frac{-2\pi}{3}} = 4\Big(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\Big) = -2 - i2\sqrt{3}.$$

(c) Es ist $z^3 = -1 = e^{i\pi}$. Wie oben folgt also $z = re^{i\varphi}$ mit $r = 1$ und $3\varphi = \pi + 2\pi k$. Somit ist $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$. Daraus erhalten wir durch Einsetzen ($k \in \mathbb{Z}$) drei verschiedene mögliche $\varphi$ in $[0, 2\pi)$ und zwar $\frac{\pi}{3}, \pi$ und $\frac{5\pi}{3}$. Das heisst, die Gleichung hat die drei Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
z_2 &= e^{i\pi} = -1 \\
z_3 &= e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Beachte: $z_1 = z_3^*$. Dies ist kein Zufall. Komplexe Lösungen von Polynom-Gleichungen mit **reellen** Koeffizienten treten immer in Paaren auf, d.h. falls $z_0$ eine Lösung ist, ist auch $z_0^*$ eine Lösung.

(d) Es ist $z^3 = 8 = 8e^{i\cdot 0\pi}$. Wie oben folgt also $z = re^{i\varphi}$ mit $r = \sqrt[3]{8} = 2$ und $3\varphi = 0 + 2\pi k$. Somit ist $\varphi = \frac{2\pi}{3}k$. Daraus erhalten wir durch Einsetzen drei verschiedene mögliche $\varphi$ in $[0, 2\pi)$ und zwar $0$, $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$. Das heisst, die Gleichung hat die drei Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2e^0 = 2 \\
z_2 &= 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\Big(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Big) = -1 + i\sqrt{3} \\
z_3 &= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\Big(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\Big) = -1 - i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Beachte: Wieder gilt $z_2 = z_3^*$.

(e) Wieder schreiben wir die Gleichung mit Polardarstellung. Es ist

$$z^4 = -2 - i\,2\sqrt{3} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

und wie bei den obigen Teilaufgaben folgt $z = re^{i\varphi}$ mit $r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ und $4\varphi = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$. Somit ist $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k$. Daraus erhalten wir durch

Einsetzen vier verschiedene mögliche $\varphi$ in $[0, 2\pi)$ und zwar $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$ und $\frac{11\pi}{6}$. Das heisst, die Gleichung hat die vier Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big)\Big) = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\
z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(\frac{5\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(\frac{5\pi}{6}\Big)\Big) = \sqrt{2}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\Big) \\
z_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(\frac{4\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{4\pi}{3}\Big)\Big) = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\
z_4 &= \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(\frac{11\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(\frac{11\pi}{6}\Big)\Big) = \sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\Big).
\end{aligned}$$

(f) Das Vorgehen ist wieder das gleiche. Es ist mit Polardarstellung

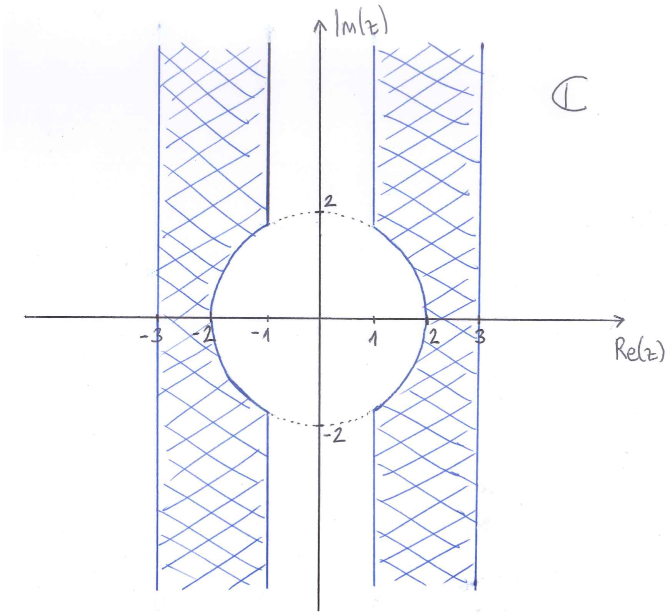
$$z^2 = 2 - i\,2\sqrt{3} = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

und es folgt $z = re^{i\varphi}$ mit $r = \sqrt{4}$ und $2\varphi = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$. Somit ist $\varphi = \frac{5\pi}{6} + \pi k$. Daraus erhalten wir durch Einsetzen zwei verschiedene mögliche $\varphi$ in $[0, 2\pi)$ und zwar $\frac{5\pi}{6}$ und $\frac{11\pi}{6}$. Das heisst, die Gleichung hat die zwei Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\Big(\cos\Big(\frac{5\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(\frac{5\pi}{6}\Big)\Big) = -\sqrt{3} + i \\
z_2 &= 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2\Big(\cos\Big(\frac{11\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(\frac{11\pi}{6}\Big)\Big) = \sqrt{3} - i.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

(a) Die gesuchte Menge ist:



(b) Der Betrag der zwei fehlenden Lösungen $z_1$ und $z_2$ ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wie $z_3$. Um die Winkel zu erhalten, kann man zum Winkel der gegebenen Lösung Vielfache von $\frac{2\pi}{3}$ addieren. Man erhält so einerseits $\frac{7}{4}\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{29}{12}\pi$ und andererseits $\frac{7}{4}\pi + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{37}{12}\pi$. Zuletzt müssen diese Winkel durch Subtraktion von $2\pi$ wieder nach $[0, 2\pi)$ verschoben werden. Man erhält die Lösungen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5}{12}\pi} \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{13}{12}\pi}.$$

In trigonometrischer Darstellung ist es

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{5}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{5}{12}\Big)\Big) \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{13}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{13}{12}\Big)\Big).$$

Alternativ: Gesucht ist $z = re^{i\varphi}$. Die rechte Seite der Gleichung in exponentieller Darstellung ist

$$\frac{1}{4}(-1-i) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}.$$

Die zu lösende Gleichung ist somit ist $r^3 e^{i3\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{5}{4}\pi}$. Daraus folgt $r = (\frac{\sqrt{2}}{4})^{\frac{1}{3}} = (2^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varphi = \frac{5}{12}\pi + \frac{2\pi k}{3}$ mit $k = 0, 1, 2$. Die Lösungen der Gleichung sind also in exponentieller Darstellung

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5}{12}\pi} \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{13}{12}\pi}.$$

In trigonometrischer Darstellung ist es

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{5}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{5}{12}\Big)\Big) \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{13}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{13}{12}\Big)\Big).$$

(c) Für $z$ gilt

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}\big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\alpha)} = \cos(\tfrac{\pi}{4}+\alpha) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}+\alpha).$$

Damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ und $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt, braucht man also $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = 0$ und $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) > 0$. Aus der ersten Bedingung folgt $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ oder $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. Nur $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ erfüllt auch die zweite Bedingung. Die richtige Antwort ist

$$\alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

(d) Die erste Antwort ist

$$\frac{2}{1 - \frac{1-i}{1+i}} = \frac{2}{1 - \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} = \frac{2}{1 - \frac{-2i}{2}} = \frac{4}{2+2i} = \frac{4(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{8-8i}{8} = 1-i.$$

Die zweite Antwort ist

$$e^{i\frac{3}{2}\pi} \cdot (1 - i\sqrt{3})^3 = -i \cdot (2e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = -i \cdot 8e^{i\pi} = -i \cdot (-8) = 8i.$$

Die dritte Antwort ist

$$\mathrm{Im}\Big(\overline{2i\big(\sqrt{-49}+3\big)}\Big) = \mathrm{Im}\big(\overline{2i(\pm 7i + 3)}\big) = \mathrm{Im}(\overline{\mp 14 + 6i}) = \mathrm{Im}(\mp 14 - 6i) = -6.$$