Lösungsvorschläge zur Serie 14

Aufgabe 1

Um das Produkt zweier Matrizen bilden zu können, muss die Anzahl Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix sein. Wir können somit folgende Produkte bilden

$$\begin{aligned}
BC =& (2 \quad 4 \quad -3) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (8 \quad 21) \\
BA =& (2 \quad 4 \quad -3) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (28) = 28 \\
AB =& \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} (2 \quad 4 \quad -3) = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -15 \\ 6 & 12 & -9 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Für die $(2,2)$-Matrix A gilt $\det(A) = ad - bc$. Wir berechnen das Produkt BA der beiden Matrizen und erhalten

$$\begin{aligned}
BA &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.
\end{aligned}$$

Genauso folgt für das Produkt AB, dass

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Entwicklung nach der zweiten Zeile liefert

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad + \quad 1 \cdot (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad + \quad 0 \\
&= -(2 \cdot 3 - 0 \cdot 1) + (-1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) \\
&= -10
\end{aligned}$$

b) Entwicklung nach der zweiten Zeile liefert

$$\begin{aligned}
\det(B) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad + \quad 0 \quad + \quad 2 \cdot (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (-2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) - 2(2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \\
&= -11.
\end{aligned}$$

c) Mit den Rechenregeln für Determinanten und Aufgaben 3a) und 3b) folgt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = 110.$$

d) Es gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

und somit ist die gesuchte Determinante z.B. mit der Regel von Sarrus

$$\det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 6 + 0 + 0 - 0 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 0 = 6 - 6 = 0.$$

e) Mit den Rechenregeln für Determinanten und Aufgaben 3d) folgt

$$\det\left((A+B)^2\right) = \det(A+B)\cdot\det(A+B) = 0.$$

f) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\det(AB-BA) &= \det\left(\begin{pmatrix} -5 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & -4 \\ -8 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} 0 \quad + \quad 3\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \quad + \quad 9\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \\
&= -3(-2\cdot 0 - 8\cdot 4) + 9(-2\cdot 6 + 8\cdot 0) \\
&= -12,
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ nach der ersten Zeile entwickelt haben.

Aufgabe 4

a) Die Determinante können wir beispielsweise mit der Regel von Sarrus berechnen und zwar

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = a^2 + 1 + 1 - a - 1 - a = a^2 - 2a + 1.$$

Somit gilt $\det(A) = 1$ genau dann, wenn $a^2 - 2a = a(a-2) = 0$. Zusammengefasst ist $\det(A) = 1$ für

$$a_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_2 = 2.$$

b) Die Determinante können wir beispielsweise durch Entwicklung nach der ersten Zeile berechnen und zwar

$$\begin{aligned}
\det(B_\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad + \quad 1\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&\qquad + \quad 2\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) - (3-\lambda+2) + 2(-1-2(3-\lambda)) \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) + 5\lambda - 19 \\
&= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 21\lambda + 5.
\end{aligned}$$

Das heisst, $\det(B_\lambda)$ ist ein Polynom vom Grade 3 und die gesuchten Werte von λ sind einfach die Nullstellen des Polynoms. Durch Raten findet man die Nullstelle $\lambda_1 = 5$. Wir können also schreiben

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 21\lambda + 5 = (\lambda - 5)(a\lambda^2 + b\lambda + c).$$

Die Koeffizienten finden wir durch Ausmultiplizieren und zwar

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 21\lambda + 5 = a\lambda^3 + (b - 5a)\lambda^2 + (c - 5b)\lambda - 5c$$

und somit $a = -1$ und dann $b = 4$ und dann $c = -1$. Das heisst

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 21\lambda + 5 = (\lambda - 5)(-\lambda^2 + 4\lambda - 1).$$

Die Nullstellen von $-\lambda^2 + 4\lambda - 1$ sind

$$\lambda_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2} = 2 \mp \sqrt{3}.$$

Somit gilt $\det(B_\lambda)$ falls $\lambda = 5$ oder $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ oder $\lambda = 2 - \sqrt{3}$.