Mathematik I (BIOL, HEST, PHAR) HS 2018
Prof. W. Farkas

Lösungsvorschläge zur Serie 3

Aufgabe 1

(a) Wenn wir uns die Folge genau anschauen gilt

$$a_1 = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}\sin(\pi) = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}\sin(2\pi) = 0, \ldots$$

Das heisst, $(a_n)_n$ ist die Folge $1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, \ldots$.
Der Grenzwert ist somit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Wir können a_n umformen (Bruch mit n^9 kürzen) und sehen direkt

$$a_n = \frac{10n^{10} + 5n^5 + 1}{9n^9 + 6n^6 + 2n^2} = \frac{10n + \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^9}}{9 + \frac{6}{n^3} + \frac{2}{n^7}}.$$

Auf der rechten Seite konvergiert der Nenner gegen 9, der Zähler jedoch divergiert nach ∞. Insgesamt ist also die Folge divergent nach ∞.

(c) Wir können a_n umformen (Bruch mit n^5 kürzen) und sehen direkt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{18n^5 + 2n^2 - 7}{3n^5 - 2n^4 + 6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{18 + \frac{2}{n^3} - \frac{7}{n^5}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^4}} = \frac{18 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = 6.$$

Aufgabe 2

(a) Direkt lässt sich der Grenzwert nicht ablesen. Formen wir jedoch zuerst um, dann sehen wir

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)}{x-4} = \lim_{x\to 4} x + 3 = 7.$$

(b) Wir formen zuerst um

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+7} - \sqrt{x})\frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x}} = \frac{x + 7 - x}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x}} = \frac{7}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x}}.$$

Jetzt können wir den Grenzwert ablesen

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+7} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x}} = 0.$$

(c) Das Vorgehen ist ähnlich wie in Teilaufgabe (b). Es gilt

$$\frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x} = 1+\sqrt{x}$$

und somit

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x}) = 2.$$

(d) Der Hinweis liefert

$$\frac{x^5-1}{5(x^2-x)} = \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{5x(x-1)} = \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{5x}.$$

Somit gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{5(x^2-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{5x} = \frac{1+1+1+1+1}{5} = 1.$$

(e) Ähnlich wie in Aufgabe 1b) und 1c) formen wir um und können den Grenzwert ablesen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10x^{10}+5x^5+1}{11x^{11}+6x^6+2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{10}{x}+\frac{5}{x^6}+\frac{1}{x^11}}{11+\frac{6}{x^5}+\frac{2}{x^9}} = \frac{0+0+0}{11+0+0} = 0.$$

Aufgabe 3

(a) Auf den einzelnen Abschnitten $(-\infty, 0]$, $(0, 1]$ und $(1, \infty)$ ist f stetig da die Funktionen $2x$, x und $x+1$ überall stetig sind (es sind Geraden, elementare Funktionen). Wir müssen also die Stetigkeit von f nur noch an den *Klebestellen* überprüfen, d.h. in den Punkten $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$. Es gilt für $x_0 = 0$:

- $f(x_0) = f(0) = 0$ nach Definition von f
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2x = 0$ da die Funktion f auf $(-\infty, 0]$ die Form $2x$ hat
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$ da die Funktion f auf $(0, 1]$ die Form x hat.

Daraus folgt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, also ist f im Punkt $x_0 = 0$ stetig.

Für $x_0 = 1$ gilt:

- $f(x_0) = f(1) = 1$ nach Definition von f
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$ da die Funktion f auf $(0, 1]$ die Form x hat
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+1 = 2$ da die Funktion f auf $(1, \infty)$ die Form $x+1$ hat.

Daraus folgt $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = f(1) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, also ist f im Punkt $x_0 = 1$ nicht stetig.

(b) Auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ ist g eine stetige Funktion, da sie eine Komposition von stetigen Funktionen ist. Damit g auch in $x_0 = 1$ stetig ist, muss $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = g(1)$ gelten. Mit dem Hinweis ist $g(x) = \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}$ für $x \neq 1$ und somit gilt

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}.$$

Damit $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = g(1)$ muss also $g(1) = \frac{1}{3}$ sein. Wähle also $a = \frac{1}{3}$.

(c) Der rechtsseitige Grenzwert von h an der Stelle $x_0 = 1$ ist zwar $\frac{1}{2}$, nämlich

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

der linksseitige Grenzwert von h an der Stelle $x_0 = 1$ ist aber

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-(x-1)}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Das heisst h ist in $x_0 = 1$ nicht stetig.
In $x_0 = -1$ ist bsp. der linksseitige Grenzwert von h gleich

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} h(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{-(x-1)}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{-1}{x+1} = \infty$$

und somit kann h dort auch nicht stetig sein.

(d) Auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen ebenfalls stetig. Wir müssen also noch die Stetigkeit in $x_0 = 0$ überprüfen.

Aus $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erhält man die Abschätzung

$$0 \leq |f(x)| = |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

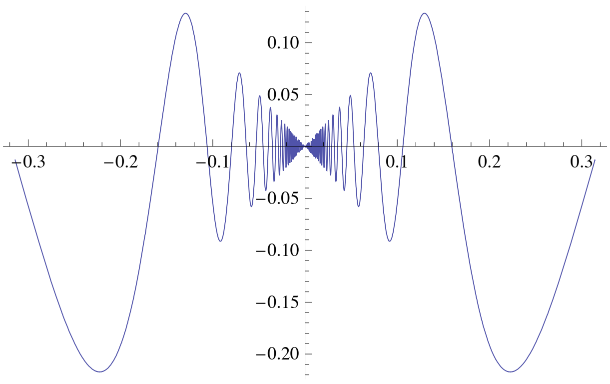
Daraus folgt (Sandwich- oder Einschachtelungsregel)

$$0 \leq \lim_{x\to 0} |f(x)| \leq \lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

also $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$. Somit ist auch

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Damit f in $x_0 = 0$ stetig ist, muss dieser Grenzwert gleich $f(0) = c$ sein.
Also müssen wir $c = 0$ wählen.
Nebenbemerkung: Der Graph von f sieht folgendermassen aus



Aufgabe 4*

Wir müssen zeigen, dass f auf dem Definitionsbereich stetig ist. Sei also $x_0 > 0$. Es bleibt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ zu zeigen.
Das heisst, dass für eine beliebige Folge $(x_n)_n$ im Definitionsbereich von f mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gelten muss.

Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in $D = (0, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach Definition bedeutet dies, dass wir für jedes $\widetilde{\varepsilon} > 0$ ein $\widetilde{n}_0$ finden, sodass $|x_n - x_0| < \widetilde{\varepsilon}$ für alle $n \geq \widetilde{n}_0$. Dies werden wir anschliessend benutzen. Um nun $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ zu zeigen, nehmen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und zeigen, dass wir einen Index n_0 finden können, sodass $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Wir rechnen zuerst

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_0)| = |\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0}| &= \left| (\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0}) \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}} \right| \\ &= \frac{|x_n - x_0|}{|\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}|} \leq \frac{|x_n - x_0|}{\sqrt{x_0}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir wählen nun $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon\sqrt{x_0}$ und finden nach Annahme (siehe oben) ein $\widetilde{n}_0$ sodass $|x_n - x_0| < \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon\sqrt{x_0}$, also $|x_n - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}$ für alle $n \geq \widetilde{n}_0$.

Setzen wir das in (1) ein, haben wir also

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq \widetilde{n}_0.$$

Wir haben also zu unserem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ einen Index gefunden (wähle $n_0 = \widetilde{n}_0$) sodass $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Das heisst f ist in x_0 stetig.