Lösungsvorschläge zur Serie 4

Aufgabe 1

Zur Erinnerung: Eine Funktion f ist differenzierbar in $x_0 \in D$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und endlich ist.

(a) f ist differenzierbar in $x_0 = 1$ mit Ableitung $f'(1) = 6$, denn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} 2(x^2+x+1) = 6.$$

(b) f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn einerseits gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1,$$

andererseits aber

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1.$$

(c) f ist differenzierbar in $x_0 = 0$ mit Ableitung $f'(0) = 0$, denn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| \cdot x^2}{x} = \lim_{x \to 0} |x| \cdot x = 0.$$

(d) f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Aufgabe 2

(a)

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} - 10x + 15x^4$$

(b) Kettenregel liefert

$$f'(x) = \left[\sqrt{8}x^{\frac{3}{2}}\right]' = \sqrt{8} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{8x} = 3\sqrt{2x}$$

(c) Kettenregel liefert

$$f'(x) = \left[(x + x^3)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}(x + x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1 + 3x^2) = \frac{1 + 3x^2}{3\sqrt[3]{(x + x^3)^2}}$$

(d) Kettenregel liefert

$$f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x} \quad \text{oder} \quad f'(x) = \left[\ln\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\right]' = \left[\frac{2}{3}\ln(x)\right]' = \frac{2}{3x}$$

(e) Kettenregel liefert

$$f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

(f) Kettenregel und Produktregel liefern

$$\begin{aligned} f'(x) = \left[e^{-\cos(x)\sin(x)}\right]' &= e^{-\cos(x)\sin(x)} \cdot [-\cos(x)\sin(x)]' \\ &= (\sin(x)^2 - \cos(x)^2)e^{-\cos(x)\sin(x)} \end{aligned}$$

(g) Quotientenregel liefert

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(h) Kettenregel (mehrfach) liefert

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(x) - \cos^2(x)}} \cdot (2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{\sin^2(x) - \cos^2(x)}}$$

(i) Kettenregel (mehrfach) liefert

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot (\ln(\ln(x)))' = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{x\ln(x)\ln\big(\ln(x)\big)}$$

(j) Da $\sin(x) > 0$ auf D können wir die logarithmische Ableitung anwenden. Auf beiden Seiten von $f(x) = \sin(x)^x$ bilden wir den Logarithmus und leiten ab

$$[\ln(f(x))]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$[\ln(\sin(x)^x)]' = [x\ln(\sin(x))]' = x \cdot \frac{1}{\sin(x)}\cos(x) + \ln(\sin(x)).$$

Gleichsetzen und multiplizieren mit $f(x) = \sin(x)^x$ liefert

$$f'(x) = \sin(x)^x \cdot \left(\frac{x\cos(x)}{\sin(x)} + \ln(\sin(x))\right).$$

Aufgabe 3

(a) Wir berechnen die Ableitung der angegebenen Funktion mit Hilfe der Quotientenregel und erhalten

$$f'_{B,K}(x) = \frac{B(x+K) - Bx}{(x+K)^2} = \frac{BK}{(x+K)^2}.$$

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass dies mit der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung übereinstimmt. in der Tat gilt

$$\frac{K}{B} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (f_{B,K}(x))^2 = \frac{K}{B} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{B^2 x^2}{(x+K)^2} = \frac{BK}{(x+K)^2}.$$

(b) Für den Grenzwert erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Bx}{x+K} = \lim_{x\to\infty} \frac{B}{1+\frac{K}{x}} = \frac{B}{1+0} = B.$$

Aufgabe 4

(a) Es ist $x(0) = 0$. Die Ableitung ist

$$x'(t) = c\big(-ae^{-at} + be^{-bt}\big) \tag{1}$$

und somit ist $x'(0) = (b-a)c > 0$.

(b) Wegen $a < b$ gilt auch $at \leq bt$ für alle $t \geq 0$. Somit folgt $-at \geq -bt$ und schliesslich $e^{-at} \geq e^{-bt}$ für alle $t \geq 0$. Wegen $c > 0$ ist folglich auch $x(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$.

(c) Es gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, denn $\lim_{t\to\infty} e^{-at} = \lim_{t\to\infty} e^{-bt} = 0$, da $a, b > 0$.

(d) Nach Gleichung (1) ist $x'(t) = 0$ äquivalent zu $ae^{-at} = be^{-bt}$. Logarithmieren auf beiden Seiten führt auf $\ln(a) - at = \ln(b) - bt$. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$t^* = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}.$$

Weiter ist $x'(t) > 0$ äquivalent zu (wieder wegen Gleichung (1))

$$be^{-bt} > ae^{-at} \quad \text{und somit} \quad t < \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a} = t^*.$$

Also ist x für alle t mit $t < t^*$ streng monoton wachsend, d.h. x ist im Intervall $[0, t^*)$ streng monoton wachsend.

Analog folgt, dass x für alle t mit $t > t^*$ also auf (t^*, ∞) streng monoton fallend ist.

Somit hat x bei t^* ein Maximum, und der maximale Wert von x ist

$$\begin{aligned} x(t^*) &= c(1 - e^{-(b-a)t^*})e^{-at^*} \\ &= c\left(1 - e^{-(b-a)\left(\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}\right)}\right) e^{-a\left(\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}\right)} \\ &= c\left(1 - \frac{a}{b}\right) e^{-\frac{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}}. \end{aligned}$$

Das einzige Minimum von x ist bei $t = 0$, denn aus den obigen Teilaufgaben wissen wir, dass $x(0) = 0$, $x(t) \geq 0$ immer und x streng monoton fallend für $t > t^*$ Somit kann es ausser $t = 0$ keinen anderen Zeitpunkt geben, in dem die Funktion 0 ist (folgt auch direkt aus der Definition von $x(t)$).

(e) Nach Aufgabenstellung soll gelten

$$x'(0) = (b-a)c \overset{!}{=} c$$

und somit $b - a = 1$, sowie

$$t^* = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a} \overset{!}{=} 1.$$

Einsetzen von $b - a = 1$ liefert $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = 1$. Daraus folgt $b = ea$. Insgesamt erhält man wieder mit $b - a = 1$ schliesslich $a = \frac{1}{e-1}$ und $b = \frac{e}{e-1}$.

(f) Der Graph zu den Parametern $(a, b, c) = (0.2, 0.5, 1)$ (blau, $x(t^*) \approx 0.34$), $(a, b, c) = (1, 1.1, 6)$ (rot, $x(t^*) \approx 0.22$) sowie $(a, b, c) = (1, 6, 1)$ (orange, $x(t^*) \approx 0.58$).