Lösungsvorschläge zur Serie 5

Aufgabe 1

(a) Für die zu betrachtende Funktion $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ erhalten wir als Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$. Die Gleichung der Tangenten an f im Punkt $x_0 = 100$ ist also

$$p(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) = \sqrt{100}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100}}(x-100) = 10+\frac{1}{20}(x-100) = \frac{1}{20}x+5.$$

Der absolute Fehler und der relative Fehler sind (mithilfe eines Taschenrechners) ungefähr:

x	$f(x)$	$p(x)$	$\Delta_a f(x)$	$\Delta_r f(x)$
101	10.0499	10.05	10^{-4}	$9.95 \cdot 10^{-6}$
105	10.2470	10.25	$3 \cdot 10^{-3}$	$2.93 \cdot 10^{-4}$
110	10.4881	10.50	0.0119	$1.13 \cdot 10^{-3}$

(b) Wir berechnen zuerst die Ableitungen:

i) $f'(x) = \left[(x+x^3)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}(x+x^3)^{-\frac{2}{3}}(1+3x^2) = \dfrac{1+3x^2}{3\sqrt[3]{(x+x^3)^2}}$.

ii) $f'(x) = \left[\ln(x^{\frac{2}{3}})\right]' = \left[\frac{2}{3}\ln(x)\right]' = \frac{2}{3x}$.

iii) $f'(x) = \left[e^{-\sin(x)}\right]' = -e^{-\sin(x)}\cos(x)$.

iv) $f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^4}\right)' = \frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$.

Um $p(x)$ für x_0 mit $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ zu berechnen, benötigen wir den Funktionswert und den Wert der Ableitung an der Stelle x_0:

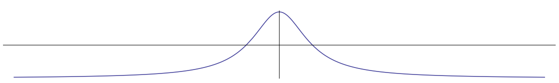
Teil	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$p(x)$
i)	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{4}}$	$\sqrt[3]{2}+\frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{4}}(x-1)$
ii)	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}(x-1)$
iii)	1	-1	$1-x$
iv)	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}-(x-1) = \frac{3}{2}-x$

Aufgabe 2

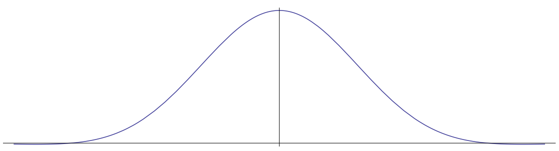
(a) Die Funktion f nimmt nur positive Werte an, da der Graph von f über der x-Achse liegt. Aus dem Graphen sehen wir, dass in jedem Punkt die Steigung der jeweiligen Tangente an f in diesem Punkt negativ ist. Somit nimmt die Ableitung f' nur negative Werte an. Die erste Ableitung ist nirgends konstant, d.h. die zweite Ableitung sicher ungleich Null. Der Graph beschreibt eine Linkskurve, damit muss überall $f'' > 0$ sein.

(b) Da die Steigung der Tangenten in jedem Punkt in $[a, b]$ positiv ist (anders gesagt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$), ist f auf dem Intervall $[a, b]$ streng monoton wachsend. Da $b > a$ ist also $f(b) > f(a)$. Also ist die Aussage (i) richtig und die Aussagen (ii),(iii) sind falsch. Die anderen beiden Aussagen können nicht entschieden werden, dadas Vorzeichen der 1. Ableitung keine Aussage über das Krümmungsverhalten einer Funktion erlaubt. Zum Beispiel erfüllen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $[1, 2]$ beide dass die Ableitung positiv ist, die beiden Funktionen haben aber ein unterschiedliches Krümmungsverhalten (f ist nach links gekrümmt, g ist nach rechts gekrümmt).

(c) Mithilfe des Hinweises haben wir $f(x) = -1 + \frac{2}{1+x^2}$. Der Ausdruck wird maximal, wenn der Nenner des Bruchs minimal wird, also genau für $x = 0$. Also ist $x = 0$ die eindeutige globale Maximalstelle von f. Der Graph von f ist in der folgenden Abbildung gegeben:



(d) Für $x \neq 0$ gilt $0 < e^{-x^2} < 1$ und $\cos x \leq 1$ und damit $f(x) < 1$. Wegen $f(0) = 1$ ist also der Nullpunkt die eindeutige globale Maximalstelle von f. Der Graph von f ist in der folgenden Abbildung gegeben.



Aufgabe 3

(a) Die Funktion f ist differenzierbar und somit streng monoton fallend wo ihre Ableitung f' negativ ist. Die Ableitung von f ist $f'(x) = x^2 - 1$. Somit ist

$$f'(x) = x^2 - 1 < 0 \implies x^2 < 1 \implies |x| < 1 \implies x \in (-1, 1).$$

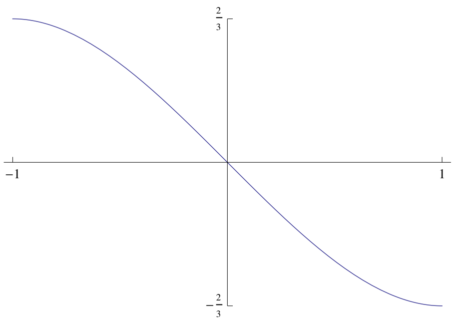
Die Funktion f ist also im Intervall $(-1, 1)$ streng monoton fallend. Die gesuchten Werte sind somit $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

Die Funktion f ist im Intervall $(-1, 1)$ streng monoton fallend. Zusätzlich gilt an den Randpunkten des Intervalls $f(-1) = \frac{2}{3}$ und $f(1) = -\frac{2}{3}$. Da f eine stetige Funktion ist (sie ist eine Elementarfunktion), muss also f zwischen -1 und 1 alle Werte zwischen $\frac{2}{3}$ und $-\frac{2}{3}$ annehmen (f kann keine Sprünge haben).

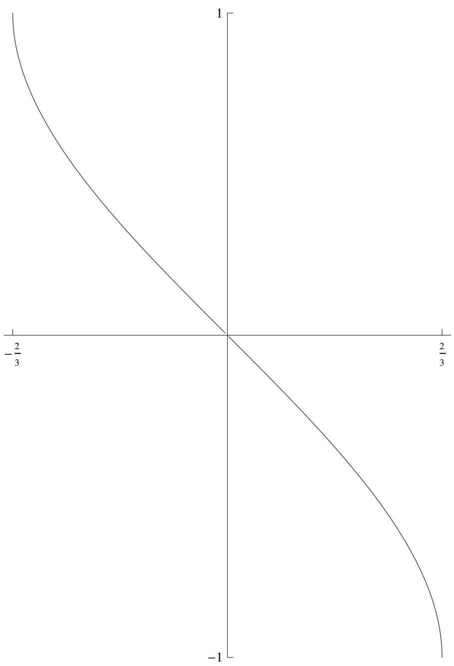
Die Funktion f mit Definitionsbereich $D_f = (x_1, x_2) = (-1, 1)$ hat somit den Wertebereich $W_f = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

(b) Nebenbemerkung: Der Definitionsbereich $D_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion von f ist $D_{f^{-1}} = W_f = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, der Wertebereich der Umkehrfunktion ist $W_{f^{-1}} = D_f = (-1, 1)$.

Den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} erhalten wir durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $x = y$. Der Graph von f ist



Der Graph von f^{-1} ist somit



(c) Aus der Vorlesung wissen wir: Die Umkehrfunktion f^{-1} ist an einer Stelle $y \in D_{f^{-1}}$ differenzierbar, falls $f'(x) \neq 0$ gilt, wobei x das **eindeutige** $x \in D_f$ ist, welches $f(x) = y$ erfüllt (es kann nur ein solches x geben, da sonst f gar nicht umkehrbar wäre). Die Ableitung von f^{-1} an der Stelle y ist in diesem Fall

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

In unserem Beispiel ist $f'(x) = x^2 - 1$ und somit $f'(x) = 0$ genau dann wenn $x = \pm 1$. Somit ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D_f = (-1, 1)$. Das heisst, die Umkehrfunktion f^{-1} ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ differenzierbar (das eindeutige zu $y \in D_{f^{-1}}$ passende $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ liegt ja in $(-1, 1)$ und somit gilt sicher $f'(x) \neq 0$).

(d) Um $(f^{-1})'(0)$ zu berechnen, muss zuerst das passende $x \in D_f = (-1, 1)$ mit $f(x) = 0$ gefunden werden. Gesucht ist also die (eindeutige) Lösung x der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x = 0$, die in $(-1, 1)$ liegt.

Da $f(x) = x(\frac{1}{3}x^2 - 1)$ sehen wir, dass die Gleichung $f(x) = 0$ die Lösungen $x = 0, \pm\sqrt{3}$ besitzt. Die einzige Lösung in $(-1, 1)$ ist also $x = 0$.

Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion liefert also

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{0^2 - 1} = -1.$$

Aufgabe 4

(a) Der Definitionsbereich der Funktion f ist $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$. Je nach Wert von a lässt sich der Bruch in der Funktion f kürzen. Und zwar gilt für $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x}{x+2} \qquad \text{im Fall } a = 1$$

$$f(x) = \frac{x(-\frac{x}{2} - 1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{-x(x+2)}{2(x-1)(x+2)} = \frac{-x}{2(x-1)} \qquad \text{im Fall } a = -\frac{1}{2}.$$

Für andere Werte von a kann man nicht kürzen. Wir behandeln deswegen die Fälle $a = 1$, $a = -\frac{1}{2}$ und a weder 1 noch $-\frac{1}{2}$ separat.

i) Fall $a = 1$: Auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ der Funktion gilt wie gesehen $f(x) = \frac{x}{x+2}$. Somit hat f in diesem Fall bei $x = 0$ eine Nullstelle und bei $x = -2$ eine Polstelle (eine Polstelle einer Funktion ist ein Punkt x_0 für den gilt, dass $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

ii) Fall $a = -\frac{1}{2}$: In diesem Fall ist die Funktion $f(x) = \frac{-x}{2(x-1)}$. Somit hat f in diesem Fall bei $x = 0$ eine Nullstelle und bei $x = 1$ eine Polstelle.

iii) Falls a weder 1 noch $-\frac{1}{2}$ ist: Die Funktion lässt sich nicht kürzen, wir haben $f(x) = \frac{x(ax-1)}{(x-1)(x+2)}$. Somit hat f in diesem Fall bei $x = 0$ und $x = \frac{1}{a}$ zwei Nullstellen und bei $x = -2$ und $x = 1$ zwei Polstellen

(b) Wir rechnen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(ax-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{a-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = a.$$

Genauso folgt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(ax-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = a.$$

(c) Wir wollen a so wählen, dass $f'(-1) = 0$. Die Ableitung von f ergibt sich mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{(2ax-1)(x-1)(x+2) - (ax^2-x)(2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{(a+1)x^2 - 4ax + 2}{(x-1)^2(x+2)^2}.$$

Somit ist $f'(-1) = 0$ genau dann, wenn

$$0 = a + 1 + 4a + 2 = 5a + 3.$$

Daraus folgt $a = -\frac{3}{5}$.

(d) Angenommen $a \in (-\frac{1}{2}, 1)$. Insbesondere hat also f an den Stellen $x = -2$ und $x = 1$ zwei Polstellen. Wir betrachten nun das Verhalten von f im Intervall $(-2, 1)$ zwischen den Polstellen. Die Funktion f ist eine Elementarfunktion und somit (auf ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$). Insbesondere ist also f im Intervall $(-2, 1)$ stetig. Weiter gilt für den Grenzwert von rechts in $x_0 = 2$ und für den Grenzwert von links in $x_0 = 1$ dass

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{\overbrace{x(ax-1)}^{\to\ -2(-2a-1)>0}}{\underbrace{(x-1)}_{\to-3}\ \underbrace{(x+2)}_{>0 \text{ und } \to 0}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\overbrace{x(ax-1)}^{\to\ a-1<0}}{\underbrace{(x-1)}_{<0 \text{ und } \to 0}\ \underbrace{(x+2)}_{\to 3}} = \infty.$$

Wir fassen zusammen: Die Funktion f ist im Intervall $(-1, 2)$ stetig (hat also keine Sprünge) und sie geht gegen $-\infty$ falls wir uns dem linken Rand des Intervalls nähern und gegen ∞ falls wir uns dem rechten Rand des Intervalls nähern. Damit nimmt die Funktion f auf diesem Intervall $(-1, 2)$ jede reelle Zahl als Wert an, das heisst $W = \mathbb{R}$.
Dies gilt nicht falls $a = 1$ oder falls $a = -\frac{1}{2}$. Denn z.B. ist falls $a = 1$ die Funktion gleich $f(x) = \frac{x}{x+2}$ (siehe 3(a)). Somit ist 1 nicht im Wertebereich von f (es gibt kein $x \in D = \mathbb{R}\setminus\{1, -2\}$ mit $f(x) = 1$). Genauso ist im Fall $a = -\frac{1}{2}$ die Funktion gleich $f(x) = \frac{-x}{2(x-1)}$ (siehe 3(a)). Somit ist $-\frac{1}{2}$ nicht im Wertebereich von f (es gibt kein $x \in D = \mathbb{R}\setminus\{1, -2\}$ mit $f(x) = -\frac{1}{2}$).