Lösungsvorschläge zur Serie 7

Aufgabe 1

(a) Beats Position wird zwischen $t = 0$ und $t = 5$ durch eine Gerade mit Steigung 10 beschrieben, die durch den Ursprung $(0, 0)$ führt. Für die Zeit zwischen $t = 5$ und $t = 10$ wird die Position durch eine Gerade mit Steigung -10 beschrieben, die z.B. durch den Punkt $(10, 0)$ führt. Wir erhalten

$$f_B(t) = \begin{cases} 10t, & \text{falls } t \in [0,5] \\ -10t + 100, & \text{falls } t \in [5,10]. \end{cases}$$

(b) Beide kommen gleichzeitig an, sind gleich weit gelaufen und damit im Mittel auch gleich schnell gewesen.

(c) Die Geschwindigkeit von Beat zur Zeit t ist $f_B'(t)$, also 10 bis zur Zeit $t = 5$ und anschliessend -10 bis zur Zeit $t = 10$ (das Minuszeichen kommt davon, dass Beat zwischen $t = 5$ und $t = 10$ *zurück*rennt). Im Betrag gesehen ist also Beats Geschwindigkeit konstante $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Geschwindigkeit von Anna zur Zeit t ist $f_A'(t) = -4t + 20$. Zu den Zeiten $t = 2$ und $t = 7$ finden wir somit die Geschwindigkeiten 12 und -8. Im Betrag gesehen ist also Annas Geschwindigkeit nach 2 Sekunden gleich $12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und nach 7 Sekunden gleich $8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(d) Anna rennt schneller als Beat (im Betrag gesehen) genau für die Zeiten t mit $|f_A'(t)| > |f_B'(t)|$. Zwischen $t = 0$ und $t = 5$ sind beide Ableitungen $f_A'(t)$ und $f_B'(t)$ grösser gleich Null (Anna und Beat rennen *vorwärts*). Also haben wir für $t \in [0, 5]$

$$|f_A'(t)| > |f_B'(t)| \implies f_A'(t) > f_B'(t) \implies -4t+20 > 10 \implies t \in [0, 2.5).$$

Zwischen $t = 5$ und $t = 10$ sind beide Ableitungen $f_A'(t)$ und $f_B'(t)$ kleiner gleich Null (Anna und Beat rennen *zurück*). Also haben wir für $t \in [5, 10]$

$$|f_A'(t)| > |f_B'(t)| \implies -f_A'(t) > -f_B'(t) \implies 4t-20 > 10 \implies t \in (7.5, 10].$$

Somit rennt Anna (im Betrag gesehen) schneller als Beat in den Zeitintervallen $[0, 2.5)$ und $(7.5, 10]$. Aus den obigen Umformungen sehen wir auch, dass Anna und Beat gleich schnell sind (das heisst $|f_A'(t)| = |f_B'(t)|$) genau zu den Zeiten $t = 2.5$ und $t = 7.5$.

(e) Die Funktion $g(t) = |f_A(t) - f_B(t)|$ beschreibt den Abstand von Beat zu Anna zum Zeitpunkt t. Aus den Graphen von f_A und f_B sehen wir, dass $g(t) = f_A(t) - f_B(t)$. Wir suchen die Maxima der Funktion g. Die Ableitung ist

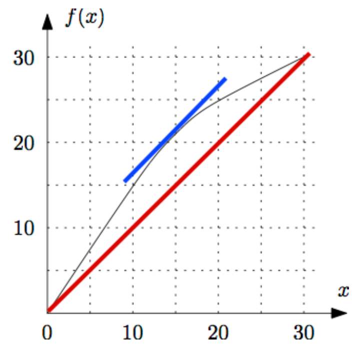
$$g'(t) = \begin{cases} -4t + 10, & \text{falls } t \in [0, 5] \\ -4t + 30, & \text{falls } t \in [5, 10]. \end{cases}$$

Es gilt $g'(t) = 0$ für $t = 2.5$ und $t = 7.5$. Auch sehen wir, dass $g'(t)$ an diesen Stellen das Vorzeichen von positiv nach negativ wechselt. Somit sind $t = 2.5$ und $t = 7.5$ Maxima. Anna ist also am weitesten von Beat entfernt zu den Zeitpunkten $t = 2.5$ und $t = 7.5$.

Aufgabe 2

(a) Nach Definition ist $a_{n+1} = f(a_n)$. Die Frage ist also, wann $f(a_n)$ grösser resp. kleiner resp. gleich a_n ist. Aus dem Graphen von f sehen wir, dass $f(x) > x$ für x im Intervall $(0, 30)$, während $f(x) = x$ für $x = 0$ und $x = 30$. Somit ist $a_{n+1} > a_n$ falls $a_n \in (0, 30)$ und weiter $a_{n+1} = a_n$ falls $a_n = 0$ oder $a_n = 30$. Der Fall $a_{n+1} < a_n$ kann nie eintreten.

(b) Die Zunahme im ersten Schritt ist $a_1 - a_0 = f(a_0) - a_0$. Gefragt ist also, für welches $x \in [0, 30]$ die Funktion $f(x) - x$ maximal ist. Nennen wir diese Funktion $g(x)$. Die Ableitung der Funktion $g(x)$ ist $g'(x) = f'(x) - 1$ und somit gleich Null falls $f'(x) = 1$. Gesucht ist also ein Punkt $x \in [0, 30]$, wo f die Steigung 1 hat. Wir sehen im Graphen, dass dies nur für $x = 15$ der Fall ist. (Die Winkelhalbierende in rot hat Steigung 1, diese können wir parallel verschieben bis wir eine Tangente an die Funktion f haben.)



Die einzige kritische Stelle von $g(x) = f(x) - x$ ist also $x_0 = 15$. Um zu kontrollieren, dass $x_0 = 15$ ein Maximum ist, betrachten wir das Verhalten der Ableitung von g an dieser Stelle:

Für $x < 15$ ist $g'(x) = f'(x) - 1 > 0$ da $f'(x) > 1$, also ist g damit hier streng monoton wachsend.

Für $x > 15$ ist $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ da $f'(x) < 1$, also ist g damit hier streng monoton fallend.

Somit ist $x_0 = 15$ eine Maximalstelle. Das heisst, für eine maximale Zunahme der Zahlenfolge im ersten Schritt muss der Anfangswert $a_0 = 15$ gewählt werden.

Aufgabe 3

(a) Die Funktion f ist gerade, da gilt

$$f(-x) = e^{-|-x|}\cos(-x) = e^{-|x|}\cos(x) = f(x).$$

Weil $e^{-|x|} > 0$ für alle x ist, kann $f(x)$ nur null sein, falls $\cos(x) = 0$ gilt. Die Nullstellen von f sind also genau die Nullstellen vom Kosinus, also $x = \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, das heisst $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2} \ldots$.

(b) Es gilt

$$-e^{-|x|} \le e^{-|x|}\cos(x) \le e^{-|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

da der Kosinus durch -1 und 1 beschränkt ist und $e^{-|x|} > 0$ ist. Der Graph der Funktion f liegt somit zwischen den Graphen der Funktionen $-e^{-|x|}$ und $e^{-|x|}$. Diese beiden Funktionen konvergieren gegen null für $x \to \infty$ und auch für $x \to -\infty$. Folglich muss auch

$$\lim_{x\to\infty} e^{-|x|}\cos(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-|x|}\cos(x) = 0$$

gelten.

(c) Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für x_0 entweder nicht existiert oder nicht endlich ist. Dazu betrachten wir den rechtsseitigen und den linksseitigen Grenzwert separat

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Mit l'Hôpital gilt (verwende dass $|x| = x$ für $x > 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{-x}\cos(x) - 1}{x}\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x)}{1} = -1.
\end{aligned}$$

und analog (verwende dass $|x| = -x$ für $x < 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{-(-x)}\cos(x) - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{x}\cos(x) - 1}{x}\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{x}\cos(x) - e^{x}\sin(x)}{1} = 1.
\end{aligned}$$

(Den linksseitigen Grenzwert könnte man auch mit einer Symmetrieüberlegung aus dem rechtsseitigen Grenzwert herleiten).

Daraus folgt, dass $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nicht existiert, da der linksseitige Grenzwert nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt. Also ist f an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

(d) Wegen der vorigen Teilaufgabe können wir keine Ableitungskriterien verwenden. Aber ähnlich wie in Serie 5 Aufgabe 2d) können wir bemerken, dass $f(0) = 1$ und $f(x) < 1$ für alle $x \neq 0$, da $\cos(x) \leq 1$ und $e^{-|x|} < 1$ für $x \neq 0$. Also liegt an der Stelle $x = 0$ ein globales Maximum vor.

(e) Es gilt

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos(x), & \text{falls } x \geq 0 \\ e^{x}\cos(x), & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Ausser an der Klebestelle $x_0 = 0$, wo f nicht differenzierbar ist (Aufgabe 3c), ist also f überall differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}\big(\cos(x) + \sin(x)\big), & \text{falls } x > 0 \\ e^{x}\big(\cos(x) - \sin(x)\big), & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Die Ableitung ist also genau dann gleich Null, wenn $\sin(x) = -\cos(x)$ für $x > 0$ bzw. wenn $\sin(x) = \cos(x)$ für $x < 0$. Das heisst, wenn $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) = -1$ für $x > 0$ bzw. wenn $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) = 1$ für $x < 0$ ist. Die kritischen Punkte von f sind somit alle positiven x mit $\tan(x) = -1$ und alle negativen x mit $\tan(x) = 1$. Mit dem zweiten Hinweis und mit der π-Periodizität des Tangens erhalten wir, dass die positiven kritischen Stellen $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$, mit $k \in \mathbb{N}$ sind und die negativen kritischen Stellen $x = -\frac{3\pi}{4} - k \cdot \pi$, mit $k \in \mathbb{N}$ sind. (Man könnte auch nur die kritischen Stellen in $(0, \infty)$ ausrechnen und dann die Symmetrie verwenden.)

(f) Um zu entscheiden, ob welche der kritischen Punkte relative Minima und welche relative Maxima sind, können wir zum Beispiel das Kriterium der 2. Ableitung brauchen. Leiten wir f' ab, erhalten wir

$$f''(x) = \begin{cases} 2e^{-x}\sin(x), & \text{falls } x > 0 \\ -2e^{x}\sin(x), & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Die kritischen Punkte auf der positiven x-Achse waren $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$, mit $k \in \mathbb{N}$, also $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4} \ldots$. Die kritischen Punkte auf der negativen x-Achse waren $x = -\frac{3\pi}{4} - k \cdot \pi$, mit $k \in \mathbb{N}$, also $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4} \ldots$. Also liegen bei $x = \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{11\pi}{4}, \pm\frac{19\pi}{4} \ldots$ tatsächlich relative Minima vor (2. Ableitung ist positiv). Bei $x = \pm\frac{7\pi}{4}, \pm\frac{15\pi}{4}, \pm\frac{23\pi}{4} \ldots$ liegen hingegen relative Maxima vor (2. Ableitung ist negativ).

(g) Der Graph von f sieht wie folgt aus: