Lösungsvorschläge zur Serie 8

Aufgabe 1

(a) $\displaystyle\int \frac{7}{x^6} - \frac{2}{x} + 1 + 2x^2\,dx = -\frac{7}{5x^5} - 2\ln|x| + x + \frac{2}{3}x^3 + C.$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + x^{-\frac{1}{10}} - x^{-\frac{5}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{9}x^{\frac{9}{10}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C.$

(c) Mit zweifacher partieller Integration (Gleichungen mit $(*)$) folgt

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot \sin(x)\,dx &\overset{(*)}{=} x^2 \cdot (-\cos(x)) - \int 2x \cdot (-\cos(x))\,dx \\
&= -x^2\cos(x) + 2\int x \cdot \cos(x)\,dx \\
&\overset{(*)}{=} -x^2\cos(x) + 2\left(x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\,dx\right) \\
&= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C \\
&= (2 - x^2)\cos(x) + 2x\sin(x) + C.
\end{aligned}$$

(d) Wir verwenden partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \frac{1}{(x+1)^4}\,dx &= x \cdot \frac{-1}{3(x+1)^3} - \int 1 \cdot \frac{-1}{3(x+1)^3}\,dx \\
&= -\frac{x}{3(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx \\
&= -\frac{x}{3(x+1)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2(x+1)^2} + C \\
&= -\frac{2x + (x+1)}{6(x+1)^3} + C \\
&= -\frac{3x+1}{6(x+1)^3} + C.
\end{aligned}$$

(e) Mit zweimaliger partieller Integration (Gleichungen $(*)$) finden wir

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\cos(x)\,dx &\overset{(*)}{=} -e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\sin(x)\,dx \\
&\overset{(*)}{=} -e^{-x}\cos(x) - \left(-e^{-x}\sin(x) + \int e^{-x}\cos(x)\,dx\right) \\
&= -e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\sin(x) - \int e^{-x}\cos(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Der Term $\int e^{-x}\cos(x)\,dx$ taucht in der obigen Gleichung auf beiden Seiten auf (mit umgekehrtem Vorzeichen). Wir lösen die Gleichung nach $\int e^{-x}\cos(x)\,dx$ auf und erhalten (wir fügen noch die Integrationskonstante hinzu)

$$2\int e^{-x}\cos(x)\,dx \quad = \quad e^{-x}(\sin(x)-\cos(x))+C.$$

Also insgesamt

$$\int e^{-x}\cos(x)\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x)-\cos(x))+C.$$

(f) Mit partieller Integration finden wir

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x)\,dx &= \int \cos^2(x)\cdot\cos(x)\,dx\\ &= \cos^2(x)\cdot\sin(x)-\int(-2\cos(x)\sin(x))\cdot\sin(x)\,dx \qquad (1)\\ &= \cos^2(x)\sin(x)+2\int\sin^2(x)\cos(x)\,dx.\end{aligned}$$

Es bleibt das Integral auf der rechten Seite auszurechnen. Wir wenden wieder partielle Integration an und finden

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx &= \sin^2(x)\cdot\sin(x)-\int 2\sin(x)\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx\\ &= \sin^3(x)-2\int\sin^2(x)\cos(x)\,dx.\end{aligned} \qquad (2)$$

Rechts und links der Gleichung (2) taucht das gleiche Integral auf. Bringen wir es auf die gleiche Seite der Gleichung, so finden wir

$$3\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \sin^3(x) \quad \text{und somit} \quad \int\sin^2(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin^3(x)+C.$$

Dies können wir in (1) einsetzen und bekommen

$$\int\cos^3(x)\,dx = \cos^2(x)\sin(x)+\frac{2}{3}\sin^3(x)+C.$$

Nach Wunsch lässt sich das noch vereinfachen indem wir $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ verwenden. Und zwar

$$\int\cos^3(x)\,dx = (1-\sin^2(x))\sin(x)+\frac{2}{3}\sin^3(x)+C = \sin(x)-\frac{1}{3}\sin^3(x)+C.$$

Aufgabe 2

(a) Mit partieller Integration erhält man

$$\int\sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x)+\int\cos^2(x)dx.$$

Würden wir versuchen, das Integral auf der rechten Seite wieder mit partieller Integration zu berechnen, so würden wir insgesamt die nicht brauchbare Gleichung $0 = 0$ erhalten (ausprobieren!). Stattdessen ist es sinnvoller, die Gleichung $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ zu verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)dx &= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x))dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \sin^2(x)dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx.\end{aligned}$$

Wir bringen den Term $\int \sin^2(x)dx$ auf die gleiche Seite und erhalten

$$F(x) = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C.$$

(b) Die Funktion f ist nie negativ. Die eingeschlossene Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse ist deswegen nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gleich

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = F(\pi) - F(0) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\pi)\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Sei $g(x)$ die Funktion $\cos^2(x)$. Gesucht ist der Flächeninhalt des Gebietes, der von unten durch $g(x)$ und von oben durch $f(x)$ begrenzt wird (im Bereich $[0, \pi]$). Zuerst müssen wir also bestimmen, für welche $x \in [0, \pi]$ wir überhaupt $g(x) \leq f(x)$ haben.

Die Graphen von f und g schneiden sich in den Punkten x mit $f(x) = g(x)$, also mit $\sin^2(x) = \cos^2(x)$, und somit falls $\sin(x) = \cos(x)$ oder $\sin(x) = -\cos(x)$. Im Bereich $[0, \pi]$ ist dies genau in den Punkten $x = \pi/4$ und $x = 3\pi/4$ erfüllt.

Nun überlegt man sich leicht (z.B. anhand einer Skizze), dass in den drei Teilintervallen $[0, \pi/4]$, $[\pi/4, 3\pi/4]$ und $[3\pi/4, \pi]$ gilt

$$\begin{aligned}&\cos^2(x) \geq \sin^2(x) \quad \text{falls } x \in [0, \pi/4] \text{ und } x \in [3\pi/4, \pi] \\ &\cos^2(x) \leq \sin^2(x) \quad \text{falls } x \in [\pi/4, 3\pi/4].\end{aligned}$$

Wir suchen also die Fläche zwischen g (unten) und f (oben) auf dem Abschnitt $[\pi/4, 3\pi/4]$. Man erhält den gesuchten Flächeninhalt $|A|$, indem man die Fläche unter dem Graphen von f in diesem Intervall berechnet, und davon den Flächeninhalt unter dem Graphen von g subtrahiert, also

$$|A| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} g(x)\,dx.$$

Die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = \sin^2(x)$ haben wir in Aufgabe 2a) schon berechnet. Wir könnten auf die gleiche Weise wie in 2a) auch die

Stammfunktion $G(x)$ von $g(x) = \cos^2(x)$ herleiten. Schneller ist es jedoch, wenn wir beachten, dass

$$\begin{aligned} G(x) &= \int g(x)\,dx = \int \cos^2(x)\,dx = \int (1 - \sin^2(x))\,dx \\ &= \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx = x - F(x) = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} |A| &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} g(x)\,dx \\ &= \left(F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(G\left(\frac{3\pi}{4}\right) - G\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zunächst gilt es, die Funktion $E(t)$ zu bestimmen. Aus $E'(t) = L(t)$ (siehe Aufgabenblatt) folgt, dass E eine Stammfunktion von L ist. Die Stammfunktion von L ist

$$E(t) = \int L(t)dt = \int L_0 \frac{1}{1 + \lambda t} dt = \frac{L_0}{\lambda} \ln|1 + \lambda t| + C.$$

Die Konstante C lässt sich dann aus der Bedingung $E(0) = 0$ erschliessen

$$E(0) = 0 \implies \frac{L_0}{\lambda} \ln|1 + \lambda \cdot 0| + C = 0 \implies C = 0.$$

Damit lautet die gesuchte Funktion für die gesamte bis zur Zeit t abgegebene Energie:

$$E(t) = 71650 \cdot \ln(1 + 0,02t).$$

Nach 30 Minuten hat der Radfahrer somit

$$E(30) = 33675.76 \text{ cal}$$

an Energie abgegeben.

Aufgabe 4

Im Intervall $[-1, 1]$ ist $x^2 \leq 1$ und daher $x^2 e^{-x} \leq e^{-x}$ (das sehen wir auch aus den Graphen). Die zu berechnende Fläche ist also mit zweimaliger partieller Integration (Gleichungen $(*)$)

$$\begin{aligned} |F| &= \int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx - \int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) e^{-x}\,dx \overset{(*)}{=} \underbrace{-(1 - x^2)e^{-x}\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - 2\int_{-1}^{1} x e^{-x}\,dx \\ &\overset{(*)}{=} 2xe^{-x}\Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = (2e^{-1} + 2e) + 2e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = 2e^{-1} + 2e + 2e^{-1} - 2e \\ &= \frac{4}{e} \approx 1.4715. \end{aligned}$$