Serie 1

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Exponentialfunktion

$$f(x) = a \cdot b^x \qquad \text{mit } a, b > 0 \text{ fest.}$$

(a) Sei $a = 2$ und $b = \frac{5}{4}$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ in ein Koordinatensystem.

(b) Sei wieder $a = 2$ und $b = \frac{5}{4}$. Wir betrachten nun den Logarithmus der Funktion $g(x)$, d.h. die Funktion $g(x) = \ln(f(x))$, wobei $\ln(\cdot)$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion $g(x)$ in ein Koordinatensystem. Was beobachten Sie? Sie sollten eine Gerade erhalten.

(c) Zeigen Sie, dass die in (b) gemachte Beobachtung allgemein gilt für Funktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b > 0$ fest. Zeigen Sie also, dass $g(x) = \ln(f(x))$ eine Gerade ist und bestimmen Sie die Geradengleichung.

(d) Für welche b ist die Geradensteigung von $g(x)$ positiv, für welche negativ?

(e) Was passiert, wenn wir statt den natürlichen Logarithmus $\ln(\cdot)$ den Logarithmus zu einer anderen Basis nehmen und zum Beispiel $g(x) = \log_{10}(f(x))$ betrachten?

Aufgabe 2

Geben Sie bei den folgenden Funktionen jeweils den grösstmöglichen Definitionsbereich D an. Weiter sind einige der Funktionen gerade, andere ungerade, dritte weder gerade noch ungerade. Bestimmen Sie, welche Situation jeweils vorliegt und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

(b) $f(t) = \frac{t}{1-t^3}$

(c) $f(t) = \frac{\sin(17t)}{t^2}$

(d) $f(t) = t \tan(t)$

(e) $f(t) = 2^{\sin t}$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktion f mit Vorschrift $f(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ und Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Welche Symmetrien hat f?

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W = \{f(t) \,|\, t \in D\}$ von f.

(d) Zeigen Sie, dass f für $t \geq 0$ streng monoton steigend ist. Das heisst, es gilt

$$f(t_2) > f(t_1) \qquad \text{für alle } t_2 > t_1 \geq 0.$$

Was lässt sich ohne weitere Rechnung über die Monotonie von f im Bereich $t \leq 0$ sagen? Benutzen Sie dafür die Teilaufgabe (a).

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils die kleinste Periode (primitive Periode) der gegebenen Funktion $f(x)$. Sie müssen nicht zeigen, dass diese Periode tatsächlich die kleinstmögliche ist.

(a) $f(x) = \cos(4\pi x)$

(b) $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x)$

(c) $f(x) = g(314x)$, wobei $g(\cdot)$ eine Funktion mit primitiver Periode 1 ist

Aufgabe 5

Betrachten Sie die beiden Funktionen g_1 und g_2 mit Funktionsvorschrift $g_1(t) = \cos(t^2)$ und $g_2(t) = (\cos(t))^2$.

(a) Skizzieren Sie die Graphen von g_1 und g_2.

(b) Welches sind die Wertebereiche W_1 und W_2 der beiden Funktionen?

(c) Welche Symmetrien haben die beiden Funktionen?

(d) Handelt es sich um periodische Funktionen? Falls ja, wie gross ist die kleinste Periodenlänge (primitive Periode)?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag 25.09.2018 / Mittwoch 26.09.2018 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.