Mathematik I (BIOL, HEST, PHAR) HS 2018
Prof. W. Farkas

Serie 12

Aufgabe 1

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 1 + i$. Zeichnen Sie die komplexen Zahlen z, $-z$ and $\frac{1}{z}$ in der Gauss'schen Zahlenebene $\mathbb{C}$ ein.

(b) Stellen Sie folgende Mengen in der Gauss'schen Zahlenebene $\mathbb{C}$ dar. Dabei stehta $\arg(z)$ das Argument einer komplexen Zahl z.

(i) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \geq \sqrt{5}\}$

(ii) $\left\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 3\,,\ \pi \leq \arg(z) \leq \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

(iii) $\left\{z \in \mathbb{C} : \ 2 \leq |z| \leq 4\,,\ \dfrac{5\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

(iv) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 2,\ \mathrm{Im}(z) \geq 1\}$.

Aufgabe 2

Die komplexe Zahl $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ liegt in der Gauss'schen Zahlenebene auf einem Kreis K um den Nullpunkt. Geben Sie alle möglichen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ an, für die das Produkt $z_1 \cdot z$ auch auf K liegt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in die kartesische Form $z = x + iy$ und bestimmen Sie damit den Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ von z.

(a) $z = \dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$

(b) $z = \dfrac{3-12i}{-1+3i}$

(c) $z = (\sqrt{3} + i)^6\ (1 - i)$

(d) $z = (-\sqrt{5} - \sqrt{5}\, i)^8$

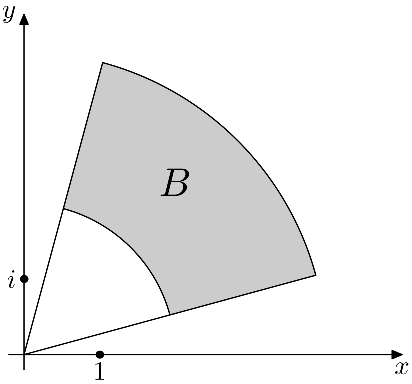
(e) $z = \left(\frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{14}) + i\ \frac{1}{2}\sin(\frac{3\pi}{14})\right)^7 \cdot 64 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\ \sin(\frac{\pi}{6})\right)$

(f) $z = e^{i\frac{5}{8}\pi}\sqrt{\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\ \sin(\frac{5\pi}{4})}$

Aufgabe 4

Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B in der komplexen Ebene mit

$$B = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{12} \right\}.$$



Entscheiden Sie, für welche Zahlen z_1 und z_2 der Quotient $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ in B liegt und für welche nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

- $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ und $z_2 = i$
- $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6}$
- $z_1 = \frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- $z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{3}}$ und $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Aufgabe 5

(a) Gegeben seien zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 mit $z_1 + z_2 = 6$ und $z_1 \cdot z_2 = 10$. Wie müssen z_1, z_2 gewählt werden?

(b) Sei $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}(5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(c) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \quad \text{und} \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}.$$

Berechnen Sie den Betrag $|z|$ und das Argument $\arg(z)$ der komplexen Zahl $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 18.12.2016 / Mittwoch, den 19.12.2016 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.