Serie 3

Aufgabe 1

Entscheiden Sie jeweils bei den angegebenen Folgen $(a_n)_n$, ob es sich um konvergente Folgen handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \sin(\dfrac{n\pi}{2})$

(b) $a_n = \dfrac{10n^{10} + 5n^5 + 1}{9n^9 + 6n^6 + 2n^2}$

(c) $a_n = \dfrac{18n^5 + 2n^2 - 7}{3n^5 - 2n^4 + 6n}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+7} - \sqrt{x})$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 1}{5(x^2 - x)}$ Hinweis: $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^{10} + 5x^5 + 1}{11x^{11} + 6x^6 + 2x^2}$

Aufgabe 3

(a) Wo ist die folgende Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ eine stetige Funktion?

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

(b) Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die folgende Funktion g eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^3-1} & \text{für } x \neq 1 \\ a & \text{für } x = 1 \end{cases} \qquad \text{Hinweis: } x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

(c) Entscheiden Sie, ob die Funktion h in den Punkten $x_0 = \pm 1$ stetig ist.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x^2-1} & \text{für } x \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = \pm 1 \end{cases}$$

(d) Wie muss $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit f eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ c & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4*

In dieser anspruchsvolleren Aufgabe geht es darum, die Stetigkeit einer gegebenen Elementarfunktion (in diesem Fall die Wurzelfunktion) mathematisch mithilfe der Definition von Stetigkeit nachzuprüfen.
Zeigen Sie, dass folgende Funktion f auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig ist:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{auf dem Definitionsbereich } D = (0, \infty)$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 9.10.2018 / Mittwoch, den 10.10.2018 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.