

Serie 4

Aufgabe 1

Entscheiden Sie mit der Definition von Differenzierbarkeit, ob folgende Funktionen f im Punkt x_0 differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(x_0)$.

(a) $f(x) = 2x^3$ mit $x_0 = 1$

(b) $f(x) = |x|$ mit $x_0 = 0$

(c) $f(x) = |x|^3$ mit $x_0 = 0$ *Hinweis:* $|x|^3 = |x| \cdot x^2$

(d) $f(x) = \sqrt{|x|}$ mit $x_0 = 0$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen. D gibt jeweils den Definitionsbereich der Funktion an.

(a) $f(x) = \frac{3}{x} + 1 - 5x^2 + 3x^5$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) $f(x) = \sqrt{8x^3}$ $D = (0, \infty)$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x + x^3}$ $D = (0, \infty)$

(d) $f(x) = \ln(x^{\frac{2}{3}})$ $D = (0, \infty)$

(e) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ $D = (0, \infty)$

(f) $f(x) = e^{-\cos(x) \sin(x)}$ $D = \mathbb{R}$

(g) $f(x) = \tan(x)$ $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(h) $f(x) = \sqrt{\sin^2(x) - \cos^2(x)}$ $D = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

(i) $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$ $D = (e, \infty)$

(j) $f(x) = \sin(x)^x$ $D = (0, \pi)$

Aufgabe 3

In der Enzymkinetik spielt die *Michaelis-Menten-Funktion* eine wichtige Rolle. Sie beschreibt die Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeit y von der Substratkonzentration x (bei konstanter Enzymkonzentration).

Für die Konstanten $B, K > 0$ ist die Michaelis-Menten-Funktion $f_{B,K}$ definiert durch $y = f_{B,K}(x) = \frac{Bx}{x + K}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f_{B,K}$ die Gleichung

$$f'_{B,K}(x) = \frac{K}{B} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (f_{B,K}(x))^2$$

für alle $x > 0$ erfüllt.

- (b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{B,K}(x)$.

Aufgabe 4

Manche Prozesse in der Pharmazie können durch eine Funktion der Form

$$x(t) = c(e^{-at} - e^{-bt})$$

mit $t \geq 0$ beschrieben werden. Dabei sind $a, b, c > 0$ positive Konstanten mit $a < b$. Die Variable t beschreibt die Zeit.

- (a) Bestimmen Sie $x(0)$ und $x'(0)$.
- (b) Wieso gilt stets $x(t) \geq 0$?
- (c) Wie verhält sich $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$?
- (d) Wo wächst die Funktion, wo fällt sie, an welchen Stellen sind Maxima und Minima?
- (e) Bestimmen Sie a und b so, dass die Funktion $x(t)$ bei $t = 1$ ein Maximum hat und $x'(0) = c$ erfüllt.
- (f) Skizzieren Sie den Graphen von x für die Parameter $(a, b, c) = (0.2, 0.5, 1)$, $(a, b, c) = (1, 1.1, 6)$ sowie $(a, b, c) = (1, 6, 1)$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 16.10.2016 / Mittwoch, den 17.10.2016 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.