Serie 5

Aufgabe 1

Sei die Funktion f mit Definitionsbereich D differenzierbar. Dann lässt sich f *in der Nähe einer Stelle* $x_0 \in D$ mithilfe der Tangenten an die Funktion f in diesem Punkt x_0 approximieren (eine Gerade!). Die Gleichung der Tangenten an die Funktion f im Punkt x_0 ist $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
(Siehe auch Folien Kapitel 4: Linearisierung einer Funktion.)

(a) Seien $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 100$. Bestimmen Sie die Tangente $p(x)$ an $f(x)$ an der Stelle x_0.

Werten Sie $f(x)$ und $p(x)$ für $x = 101, 105, 110$ aus.

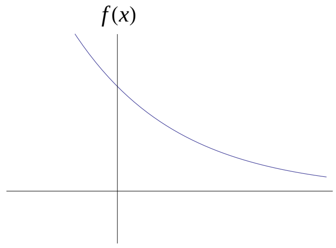
Wie gross sind jeweils der absolute Fehler $\Delta_a f(x) = |p(x) - f(x)|$ und der relative Fehler $\Delta_r f(x) = \left|\frac{p(x) - f(x)}{f(x)}\right|$ der obigen Approximierung von $f(x)$ durch $p(x)$ an den Stellen $x = 101, 105, 110$?

(b) Bestimmen Sie die Tangente $p(x)$ jeweils an der Stelle x_0 für folgende Funktionen f.

i) $f(x) = \sqrt[3]{x + x^3}$ mit $D = [0, \infty)$, im Punkt $x_0 = 1$.
ii) $f(x) = \ln\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$ mit $D = (0, \infty)$, im Punkt $x_0 = 1$.
iii) $f(x) = e^{-\sin(x)}$ mit $D = \mathbb{R}$, im Punkt $x_0 = 0$.
iv) $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$ mit $D = \mathbb{R}$, im Punkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 2

(a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Begründen Sie, welche der Funktionen f, f' und f'' nur negative und welche nur positive Werte annimmt.



(b) Der Graph einer differenzierbaren Funktion f mit $D = [a, b]$ habe in jedem Punkt eine Tangente mit positiver Steigung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch, welche können nicht beantwortet werden?

 (i) $f(b) > f(a)$.
 (ii) $f(a) > f(b)$.
 (iii) $f(a) = f(b)$.
 (iv) Der Graph von f beschreibt auf $[a, b]$ eine Linkskurve.
 (v) Der Graph von f beschreibt auf $[a, b]$ eine Rechtskurve.

(c) Entscheiden Sie ohne Berechnung der 1. Ableitung, ob die folgende Funktion $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ein globales Maximum hat oder nicht.
Hinweis: Schreiben Sie den Zähler als $1 - x^2 = -1 - x^2 + 2$.

(d) Entscheiden Sie ohne Berechnung der 1. Ableitung, ob die folgende Funktion $f(x) = e^{-x^2} \cos x$ ein globales Maximum hat.
Hinweis: Für $x \neq 0$ gilt $0 < e^{-x^2} < 1$.

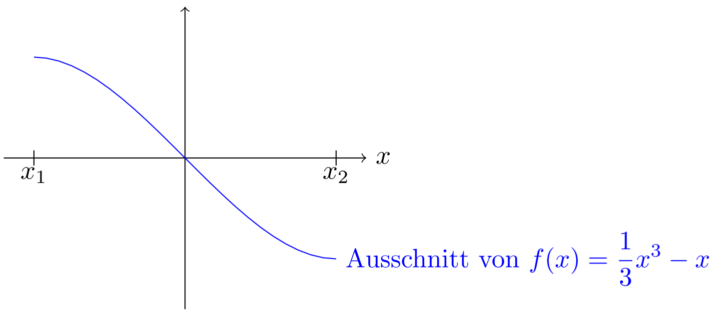
Aufgabe 3

Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ ist in einem Intervall (x_1, x_2) *streng monoton fallend*.

(a) Bestimmen Sie x_1 und x_2.

Welche Werte nimmt f für $x \in (x_1, x_2)$ an? Anders gesagt, was ist der Wertebereich der Funktion f wenn wir die Funktion nur auf dem Definitionsbereich $D_f = (x_1, x_2)$ betrachten?

(b) Der Graph von f in diesem Ausschnitt (x_1, x_2) sieht folgendermassen aus:



Betrachten wir also die Funktion f **nur** auf dem Definitionsbereich $D_f = (x_1, x_2)$ sehen wir anhand des Graphen von f, dass die Funktion f umkehrbar ist. Skizzieren Sie den Graphen von f^{-1}.

(c) Wo ist f^{-1} differenzierbar?

(d) Bestimmen Sie $(f^{-1})'(0)$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x(ax-1)}{(x-1)(x+2)}$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine **feste Zahl** ist.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich. Wie lauten die Null- und Polstellen? *Hinweis:* Fallunterscheidung für a

(b) Wie verhält sich die Funktion asymptotisch für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$?

(c) Wie muss a gewählt werden, damit $x = -1$ ein kritischer Punkt von f ist?

(d) Nehmen Sie nun an, dass $a \in (-\frac{1}{2}, 1)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Wertebereich W der Funktion f ganz $\mathbb{R}$ ist.
Ist dies auch noch der Fall falls $a = -\frac{1}{2}$ oder $a = 1$?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 23.10.2016 / Mittwoch, den 24.10.2016 in den Übungsstunden und ausserhalb der Zeiten in den Fächern im HG E 66.1.