Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 1: Funktionen

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

1. Funktionen
    - Definition einer Funktion
    - Darstellungsformen einer Funktion
    - Funktionseigenschaften
        - Nullstellen
        - Symmetrieverhalten
        - Monotonie
        - Periodizität
    - Umkehrfunktion oder inverse Funktion

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 146-163**

- **Grundbegriffe:**

  D = Definitionsbereich: Veränderlichkeit/Variable
  W = Wertebereich
  f = Vorschrift/Regel der Abhängigkeit

- **Definition:**

  Unter einer *Funktion* verstehen wir eine *Vorschrift*, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet.
  Schreibweise:
  $y = f(x) \qquad x \mapsto y$

- **Beispiel 1:**
  $D = \{\text{Alle Städte der Schweiz}\}$
  $W = \{\text{Alle Kantone der Schweiz}\}$
  Stadt $\mapsto$ Kanton

- **Beispiel 2:**
  Fallgeschwindigkeit v als Funktion der Zeit t:
  $$v = gt \ (g\text{: Erdbeschleunigung, } g > 0)$$
  Definitionsbereich: $t \geq 0$
  Wertebereich: $v \geq 0$

Darstellungsformen einer Funktion:

- **a) Analytische Darstellung:**
  explizite Darstellung: $y = f(x)$
  Bsp: $y = \sin(x)$ und $v(t) = g \cdot t$
  implizite Darstellung: $F(x; y) = 0$
  Bsp: $F(x; y) = \log y + x^2 = 0$ und $F(x; y) = xy - 2 = 0$

- **b) Darstellung durch eine Wertetabelle:**

Tag	21.9.12	22.9.12	23.9.12
Temperatur	18°	17.5°	20°

Temperatur(Tag)

- **c) Graphische Darstellung:**
  kartesisches/rechtwinkliges Koordinatensystem

- **d) Parametrische Darstellung:**
  $x = x(t), y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$

Nullstellen

- **Definition:**

  Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine *Nullstelle*, wenn $f(x_0) = 0$ ist.

  In einer Nullstelle x_0 schneidet oder berührt die Funktionskurve die x-Achse.

- **Beispiele:**

  (1) Die lineare Funktion (Gerade) $y = x - 2$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = 2$.

  (2) Die Parabel $y = (x - 1)^2$ besitzt an der Stelle $x_1 = 1$ eine doppelte Nullstelle, d.h. einen Berührungspunkt.

Symmetrieverhalten
Wir unterscheiden zwischen Spiegel- und Punktsymmetrie.

Spiegelsymmetrie:

- Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst gerade, wenn sie für jedes $x \in D$ die Bedingung
$$f(-x) = f(x)$$
erfüllt.
- Die Funktionskurve einer geraden Funktion verläuft spiegelsymmetrisch zur y-Achse.
- Jeder Punkt der Kurve geht dabei durch Spiegelung an der y-Achse wieder in einen Kurvenpunkt über.

Punktsymmetrie:

- Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst *ungerade*, wenn sie für jedes $x \in D$ die Bedingung
$$f(-x) = -f(x)$$
erfüllt.
- Das Bild einer ungeraden Funktion verläuft punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
- Spiegelt man einen beliebigen Kurvenpunkt am Nullpunkt, so liegt der Bildpunkt ebenfalls auf der Funktionskurve.

Beispiele zur Symmetrie

1. Die Potenzfunktion $y = x^n$ (mit $n = 1, 2, 3, ...$) sind
   - entweder spiegelsymmetrisch zur y-Achse, also gerade Funktionen (für $n =$ gerade)
   - oder punktsymmetrisch und damit ungerade Funktionen (für $n =$ ungerade).

   Sie erklären die Bezeichnungen *gerade* bzw. *ungerade* für die beiden Symmetriearten.

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$, ist eine gerade Funktion, denn es gilt:

   $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$

Monotonie

Definition:
x_1 und x_2 seien zwei beliebige Werte aus dem Definitionsbereich D einer Funktion $y = f(x)$, die der Bedingung $x_1 < x_2$ genügen.

Dann heisst die Funktion

- monoton wachsend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$.

Beispiele für Monotonie

- *Streng monoton wachsend:*

  a) Jede Gerade mit positiver Steigung
  b) Kubische Parabel $y = x^3$

- *Streng monoton fallend:*

  a) Jede Gerade mit negativer Steigung
  b) Radioaktiver Zerfall: Beim natürlichen radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl n der Atomkerne nach einem Exponentialgesetz mit der Zeit t ab.

- *Die Normalparabel:*

  Die Normalparabel, $y = x^2, x \in \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ *weder* monoton fallend *noch* monoton wachsend.
  Im Intervall $x \geq 0$ jedoch streng monoton wachsend und im Intervall $x \leq 0$ streng monoton fallend.

- *Die Rampenfunktion:*

  Die Rampenfunktion mit der Gleichung

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ x, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

  verläuft im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend (streng monoton wachsend ist sie nur im Intervall $0 \leq x \leq 1$).

Periodizität

Definition:
Eine Funktion $y = f(x)$ heisst periodisch mit der Periode p, wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \pm p$ zum Definitionsbereich der Funktion gehört und

$$f(x \pm p) = f(x)$$

ist.

Anmerkungen:
1) Mit der Periode p ist auch $\pm k \cdot p$ eine Periode der Funktion ($k \in \mathbb{N}^*$).

2) Die kleinste positive Periode p heisst auch primitive Periode.

Beispiel für Periodizität: Die Sinusfunktion

- Die Sinusfunktion, $y = \sin x$ ist periodisch mit der (primitiven) Periode $p = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

- Auch $-2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi$, ... sind Perioden der Sinusfunktion.

- Periodische Funktionen durchlaufen somit ihren gesamten Wertevorrat in jedem Periodenintervall, d.h. in jedem Intervall der Länge p.
  So nimmt beispielsweise die Sinusfunktion in dem Periodenintervall $0 \leq x \leq 2\pi$ sämtliche Funktionswerte an ($-1 \leq y \leq 1$).

Umkehrfunktion oder inverse Funktion

- **Definition:** Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D und Wertebereich W heisst *umkehrbar*, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:
  1. aus $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in D$, folgt stets $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  2. für alle $y \in W$ existiert ein $x \in D$ derart, dass $y = f(x)$ gilt.

Anschaulich bedeutet 1., dass verschiedene Punkte in D auf verschiedene Punkte in W abgebildet werden, und 2. dass alle Werte in W "getroffen" werden. Ist also eine Funktion $y = f(x)$ umkehrbar, so gehört zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$.

Schreibweise inverser Funktionen

Die Schreibweise für die nach der Variablen x aufgelöste Form von $y = f(x)$ ist:

$$\boxed{x = f^{-1}(y) \text{ oder besser } x = g(y).}$$

Dieser Darstellung zufolge müsste man die Achsenbezeichnungen miteinander vertauschen, dies ist aber nicht üblich.
Stattdessen vertauscht man in der Gleichung $x = g(y)$ die beiden Variablen miteinander und erhält die neue Gleichung

$$\boxed{y = g(x)}$$

welche als *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion* von $y = f(x)$ bezeichnet wird.

Funktionsgleichung einer Umkehrfunktion

1. Man löst zunächst die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach der Variablen x auf (diese Auflösung muss möglich und eindeutig sein!):

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{nach } x \text{ auflösen}]{\text{Funktionsgleichung}} x = g(y)$$

2. Durch formales Vertauschen der beiden Variablen x und y gewinnt man hieraus schliesslich die *Umkehrfunktion* $y = g(x)$:

$$x = g(y) \xrightarrow[\text{miteinander vertauschen}]{\text{Variablen } x \text{ und } y} y = g(x)$$

Weiteres zu inversen Funktionen

- Die beiden besprochenen Schritte lassen sich in beliebiger Reihenfolge ausführen.
- Bei der Umkehrung werden Wertebereich und Definitionsbereich vertauscht.
- Nicht jede Funktion lässt sich umkehren.
  Nicht invertieren lässt sich z.B. die Normalparabel
  $y = x^2, x \in \mathbb{R}$.
  Offensichtlich liegt dies an der fehlenden Monotonie der Normalparabel.

Beispiel 1
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

$$y = 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Durch Auflösen nach x erhält man zunächst

$$x = g(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \qquad (\text{mit } x \in \mathbb{R}).$$

Durch formales Vertauschen erhält man die gesuchte Umkehrfunktion:

$$y = g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Beispiel 2:
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

$$y = x^2 \quad (x \geq 0).$$

Durch Auflösen nach x erhält man zunächst

$$x = g(y) = \sqrt{y} \quad (y \geq 0).$$

Durch formales Vertauschen erhält man die gesuchte Umkehrfunktion:

$$y = g(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0).$$

Beispiel 2 Anschaulich: