Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 4: Anwendungen der Differentialrechnung

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

4. Anwendungen der Differentialrechnung
    - Monotonie
    - Krümmung
    - Linearisierung einer Funktion
    - Extremwerte
    - Wendepunkte
    - Kurvendiskussion
    - Newtonverfahren

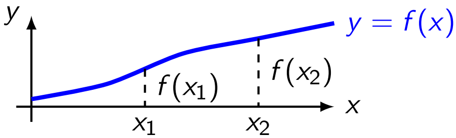
Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 366 - 407,**
  Seiten 414 - 421 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

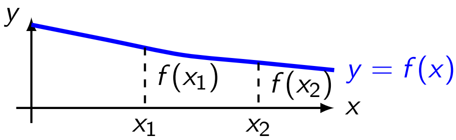
Wachsende und fallende Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}$; $D \subseteq \mathbb{R}$

- f heisst *wachsend*, falls
  $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt.



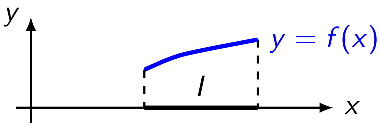
- f heisst *fallend*, falls
  $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt.



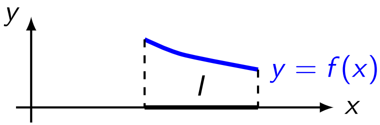
Wachstumsverhalten und Ableitung

$I =$ Intervall $(I \subseteq \mathbb{R})$
$f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion

- $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ ist auf I **wachsend**



- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ ist auf I **fallend**



Beispiel 1

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 100$$
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow f(x)$ ist im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend.

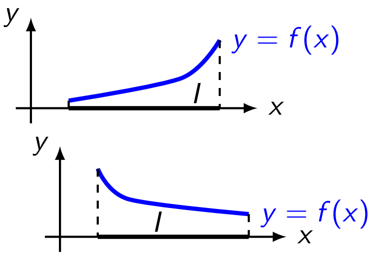
Beispiel 2

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x > 0$$

$\Rightarrow f(x)$ ist im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend.

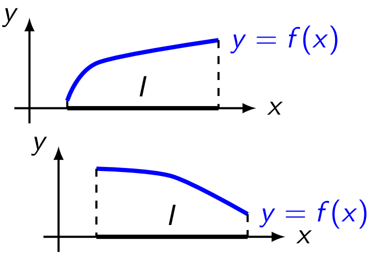
Krümmungsverhalten und zweite Ableitung: Linkskurve

- I = Intervall ($I \subseteq \mathbb{R}$)
- $f : I \to \mathbb{R}$ = zweimal differenzierbare Funktion
  (d.h. f ist auf I differenzierbar und die Ableitung f' genauso)
- $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$
  $\Rightarrow$ f beschreibt auf I eine *Linkskurve* (f ist konvex)



Krümmungsverhalten und zweite Ableitung: Rechtskurve

- I = Intervall ($I \subseteq \mathbb{R}$)
- $f : I \to \mathbb{R}$ = zweimal differenzierbare Funktion
  (d.h. f ist auf I differenzierbar und die Ableitung f' genauso)
- $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I$
  $\Rightarrow$ f beschreibt auf I eine *Rechtskurve* (f ist konkav)



Zusammenfassung

- Anhand der 1. Ableitung lässt sich die *Monotonie* der Funktion ablesen.
- Anhand der 2. Ableitung lässt sich die *Krümmung* der Funktion ablesen.

Beispiel

$$\boxed{f(x) = x^2 \ln x}$$

a) Definitionsbereich $D = (0, \infty)$

b) f ist das Produkt zweier elementarer Funktionen, somit ist f stetig auf $(0, \infty)$

c) Monotonie

1. Ableitung der Funktion:

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1)$$

Wo hat die Funktion $f(x)$ keine Steigung?

$\Rightarrow f'(x)$ gleich Null setzen

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot (2\ln x + 1) = 0 \Rightarrow \underbrace{x}_{>0} \cdot (2\ln x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = e^{-\frac{1}{2}}}}$$

Was hat die Funktion für eine Steigung links und rechts von $x = e^{-\frac{1}{2}}$?

- Links von $x = e^{-\frac{1}{2}}$ (z.B. an der Stelle e^{-1}):
  $f'(e^{-1}) = e^{-1}(2\ln e^{-1} + 1) = e^{-1}(-2+1) = -e^{-1} \underline{\underline{\leq 0}}$
- Rechts von $x = e^{-\frac{1}{2}}$ (z.B. an der Stelle $e = e^{1}$):
  $f'(e) = e(2\ln e + 1) = e(2+1) = 3e \underline{\underline{\geq 0}}$

$\Rightarrow$ Die Funktion fällt links von $x = e^{-\frac{1}{2}}$ und
steigt rechts von $x = e^{-\frac{1}{2}}$
(an der Stelle $x = e^{-\frac{1}{2}}$ liegt ein Minimum vor, mehr dazu später)

c) Krümmung

2. Ableitung der Funktion:

$$f''(x) = (2x \ln x + x)' = (2x \ln x)' + x' = 2\left[\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] + 1$$
$$= 2 \ln x + 3$$

Wo hat die Funktion keine Krümmung?

$\Rightarrow f''(x)$ gleich Null setzen

$\Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = e^{-\frac{3}{2}}}}$

Was für eine Krümmung hat die Funktion oberhalb und unterhalb des Punktes $x = e^{-\frac{3}{2}}$?

- Unterhalb von $x = e^{-\frac{3}{2}}$ (z.B. an der Stelle e^{-2}):
  $f''(e^{-2}) = 2\ln(e^{-2}) + 3 < 0$
- Oberhalb von $x = e^{-\frac{3}{2}}$ (z.B. an der Stelle $e^{-\frac{1}{2}}$):
  $f''(e^{-\frac{1}{2}}) = 2\ln(e^{-\frac{1}{2}}) + 3 > 0$

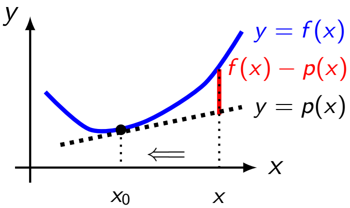
$\Rightarrow$ Die Funktion ist *konkav* unterhalb von $x = e^{-\frac{3}{2}}$ und *konvex* oberhalb von $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

Linearisierung einer Funktion

Eine nichtlineare differenzierbare Funktion f lässt sich in der Umgebung eines Kurvenpunktes $P = (x_0, y_0)$ näherungsweise durch die dortige Tangente, d.h. durch eine lineare Funktion p ersetzen.

$$\boxed{p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Graphische Veranschaulichung:



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} = 0$$

$f(x) \approx p(x)$, falls $x \approx x_0$
$\Rightarrow$ $p(x)$ ist eine lineare Funktion (eine Gerade!), die $f(x)$ bei x_0 gut annähert

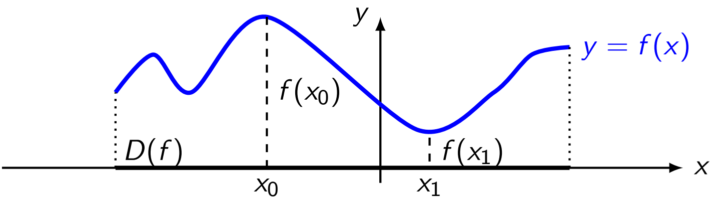
Extremwerte

- In zahlreichen Anwendungen stellt sich das Problem, von einer vorgebenen Funktion $f(x)$ den grössten und kleinsten Funktionswert auf einem vorgegebenen Intervall I zu bestimmen.
- Die Vorgehensweise ist dann jeweils wie folgt:
  1. Zunächst werden mithilfe der Differentialrechnung die im Innern des Intervalls I liegenden relativen Extrempunkte berechnet.
  2. Durch Vergleich dieser Werte mit den Funktionswerten in den Randpunkten des Intervalls erhält man den gesuchten grössten (oder kleinsten) Wert der Funktion $f(x)$ im Intervall I.

Absolute Extrema

$f: D \to \mathbb{R}$; $D \subseteq \mathbb{R}$; $x_0, x_1 \in D$

- f hat ein **absolutes Maximum** an der Stelle x_0 wenn gilt:
  $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$
  (der Wert $f(x_0)$ ist ein absolutes Maximum von f)
- f hat ein **absolutes Minimum** an der Stelle x_1 wenn gilt:
  $f(x_1) \leq f(x)$ für alle $x \in D$
  (der Wert $f(x_1)$ ist ein absolutes Minimum von f)

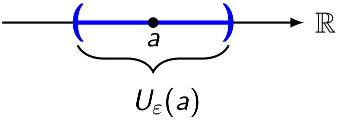


- f hat an der Stelle x_0 ein **absolutes Extremum** wenn gilt:

$$f \text{ hat an der Stelle } x_0 \begin{cases} \text{ein } \textit{absolutes Maximum} \\ \text{oder} \\ \text{ein } \textit{absolutes Minimum} \end{cases}$$

Definition Umgebung

- Für $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ heisst
  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ die ε-Umgebung von a

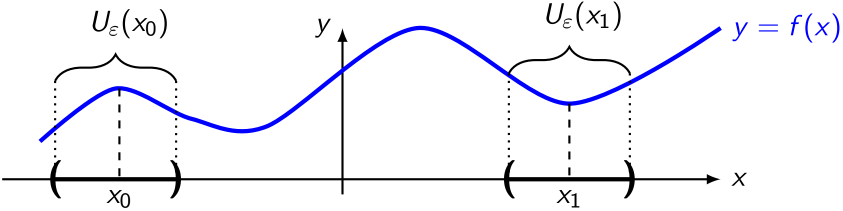


- $U_\varepsilon(a) =$ offenes Intervall mit Mittelpunkt a
  und der Länge 2ε

Relative Extrema

$f : D \to \mathbb{R}$; $D \subseteq \mathbb{R}$; $x_0, x_1 \in D$

- f hat ein **relatives Maximum** an der Stelle x_0, wenn es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt (mit genügend kleinem $\varepsilon > 0$), sodass:
  $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D \cap U_\varepsilon(x_0)$
- f hat ein **relatives Minimum** an der Stelle x_1, wenn es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_1)$ gibt, sodass:
  $f(x_1) \leq f(x)$ für alle $x \in D \cap U_\varepsilon(x_1)$



- f hat an der Stelle x_0 ein **relatives Extremum** wenn gilt:

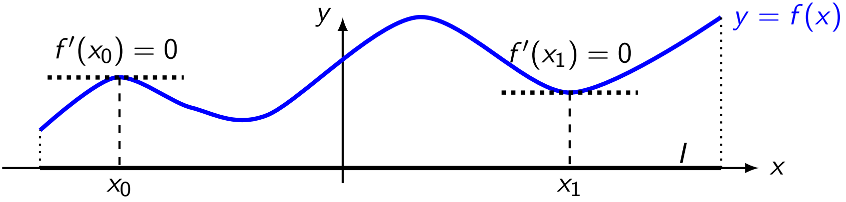
$$f \text{ hat an der Stelle } x_0 \begin{cases} \text{ein } \textbf{relatives Maximum} \\ \text{oder} \\ \text{ein } \textbf{relatives Minimum} \end{cases}$$

Relative Extrema und Ableitung

- I = Intervall ($I \subseteq \mathbb{R}$) ; $x_0 \in I$ *innerer* Punkt
- $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion
- Hat f an der Stelle x_0 ein relatives Extremum, so gilt:

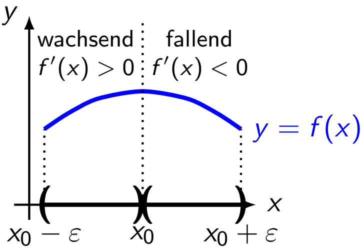
$$f'(x_0) = 0$$

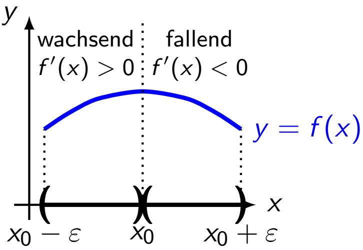
$\Rightarrow$ Zum Aufsuchen relativer Extrema im Innern von I sucht man die Nullstellen der Ableitung von f.



Maximum oder Minimum?

- I = Intervall ($I \subseteq \mathbb{R}$) ; $x_0 \in I$ innerer Punkt
- $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion; $\boxed{f'(x_0) = 0}$
- Ist f links von x_0 wachsend und rechts von x_0 fallend, so hat f in x_0 ein **relatives Maximum**.





- Gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$$

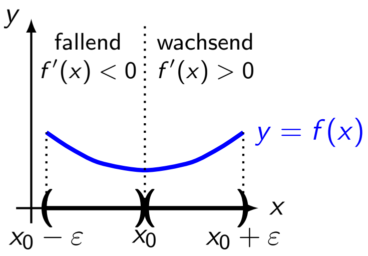
und

$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

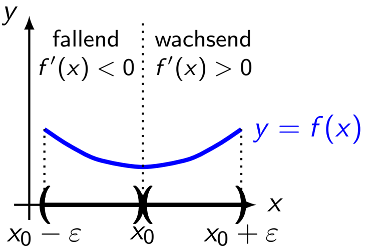
so hat f an der Stelle x_0 ein **relatives Maximum**.

Maximum oder Minimum?

- $I =$ Intervall $(I \subseteq \mathbb{R})$; $x_0 \in I$ innerer Punkt
- $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion; $\boxed{f'(x_0) = 0}$
- Ist f links von x_0 fallend und rechts von x_0 wachsend, so hat f in x_0 ein **relatives Minimum**.



Extremwerte



- Gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$$

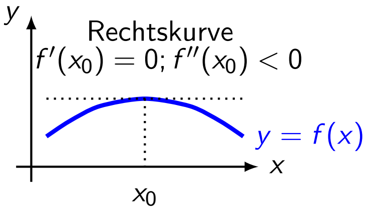
und

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

so hat f an der Stelle x_0 ein **relatives Minimum**.

Relatives Maximum und zweite Ableitung

- I = Intervall ($I \subseteq \mathbb{R}$) ; $x_0 \in I$ innerer Punkt
- $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktion
  Gilt $\boxed{f'(x_0) = 0}$ und verläuft der Graph von f über x_0 als **Rechtskurve (konkave Funktion)**,
  so hat f an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.

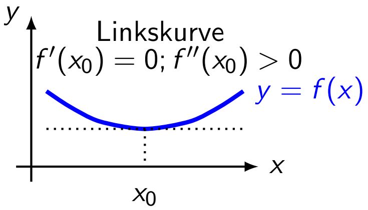


Relatives Maximum und zweite Ableitung

$$\left.\begin{array}{r} f'(x_0) = 0 \\ \text{und} \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ hat in } x_0 \text{ ein relatives Maximum}$$

Relatives Minimum und zweite Ableitung

- I = Intervall ($I \subseteq \mathbb{R}$) ; $x_0 \in I$ innerer Punkt
- $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktion
- Gilt $\boxed{f'(x_0) = 0}$ und verläuft der Graph von f über x_0 als **Linkskurve (konvexe Funktion)**,
  so hat f an der Stelle x_0 ein relatives Minimum.



Relatives Minimum und zweite Ableitung

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} f'(x_0) = 0 \\ \text{und} \\ f''(x_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ hat in } x_0 \text{ ein relatives Minimum}}$$

Beispiel 1.

$f(x) = x^2$

somit ist $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

die zweite Ableitung ist $f''(x) = 2$

an der Stelle $x = 0$ also $f''(0) = 2 > 0$

$\Rightarrow x_0 = 0$ ist ein relatives Minimum

(Bemerkung: ist sogar ein globales Minimum!)

Beispiel 2.

$f(x) = x^3$

somit ist $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

die zweite Ableitung ist $f''(x) = 6x$

an der Stelle $x = 0$ also $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow x_0 = 0$ ist kein Extrempunkt!

(in der Tat ist $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, d.h. f ist auf $\mathbb{R}$ monoton wachsend)

Beispiel 3.

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(1+x^2) - x^2 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot \left[(1+x^2)^2\right]'}{(1+x^2)^4} = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(0) = \frac{2 - 6 \cdot 0}{(1+0^2)^3} > 0$$

$\Rightarrow x_0 = 0$ ist ein relatives Minimum

Wendepunkte

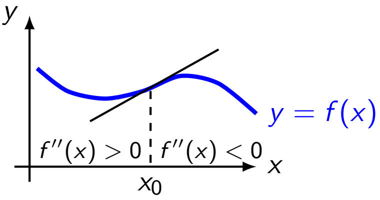
- I = Intervall ($I \subseteq \mathbb{R}$) ; $x_0 \in I$ (innerer Punkt)
- $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktion (auf I kann man $f'' = (f')'$ bilden)
- f hat in x_0 einen **Wendepunkt** $\Leftrightarrow$

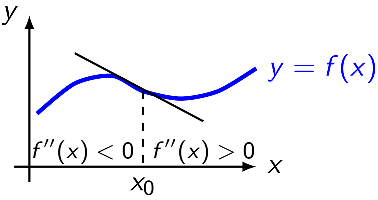
$$\boxed{f''(x_0) = 0}$$

und

$\boxed{\text{die zweite Ableitung } f'' \text{ ändert in } x_0 \text{ das Vorzeichen!}}$

Wendepunkte: Graphische Illustration





Übergang von Links- zu Rechtskurve oder von Rechts- zu Linkskurve an der Stelle x_0

Terrassenpunkt / Sattelpunkt

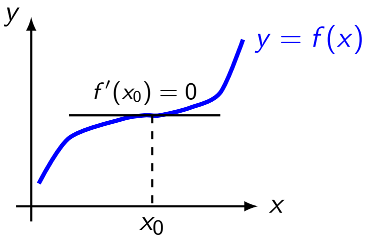
- f hat in x_0 einen **Terrassenpunkt / Sattelpunkt** $\Leftrightarrow$

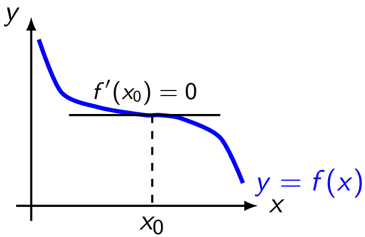
$$\boxed{f \text{ hat in } x_0 \text{ einen } \textit{Wendepunkt}}$$

und

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Terrassenpunkt / Sattelpunkt: graphische Illustration





Kurvendiskussion

- Gegeben ist: $f(x) = \ldots$
  $\Rightarrow$ Ziel: Eigenschaften der Funktion aus $f(x)$ herleiten
- **Ablauf:**
  a) Definitionsbereich
  b) Symmetrie
  c) Nullstellen
  d) Polstellen
  e) Ableitungen (bis und mit $f''(x)$)
  f) Relative Extremwerte
  g) Wendepunkte / Sattelpunkte
  h) Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$
  i) Wertebereich
  j) Skizze

Beispiel

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 5}{x^3}$$

a) Welche x-Werte darf man in f einsetzen?
$\Rightarrow$ Nenner $\neq 0$
$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Ist f gerade, ist f ungerade?

- gerade: wenn $f(-x) = f(x)$
- ungerade: wenn $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{-5(-x)^2 + 5}{(-x)^3} = \frac{-5x^2 + 5}{-x^3} = -\frac{-5x^2 + 5}{x^3} = -f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ ist ungerade (nullpunktsymmetrisch)

c) Wo schneidet f die x-Achse?

$$f(x) = 0$$

$$\frac{-5x^2+5}{x^3} = 0 \Rightarrow \text{ der Zähler muss 0 sein}$$

$$\begin{aligned} -5x^2 + 5 &= 0 \\ 5 &= 5x^2 \\ 1 &= x^2 \quad \Big| \pm\sqrt{1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1 = 1 & x_2 = -1 \\ y_1 = 0 & y_2 = 0 \end{array}}$$

d) Besitzt f Pole, d.h. vertikale Asymptoten?

$$\frac{-5x^2+5}{x^3}$$

Polstelle dort, wo der Nenner gleich 0 ist.
$\Rightarrow x = 0$

e) $f'(x), f''(x)$, mit Quotientenregel ausrechnen:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{(q(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10x \cdot x^3 - (-5x^2 + 5) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-10x^2 + 15x^2 - 15}{x^4} = \frac{5x^2 - 15}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-10(x^2 - 6)}{x^5}$$

f) Wo besitzt die Funktion relative Minima / Maxima?

- Minimum: falls $f'(x) = 0, f''(x) > 0$
- Maximum: falls $f'(x) = 0, f''(x) < 0$

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 15}{x^4} = 0$$
$$5x^2 - 15 = 0$$
$$5x^2 = 15$$
$$x^2 = 3 \rightarrow x_3 = \sqrt{3},\ x_4 = -\sqrt{3}$$

gefundene x-Werte in $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(x_3) = \frac{-10 \cdot (3-6)}{(\sqrt{3})^5} > 0 \Rightarrow \text{ rel. Minimum } \left(\sqrt{3}, \frac{-10}{(\sqrt{3})^3}\right)$$

$$f''(x_4) = \underbrace{f''(-\sqrt{3}) < 0}_{\text{weil ungerade}} \Rightarrow \text{ rel. Maximum } \left(-\sqrt{3}, \frac{10}{(\sqrt{3})^3}\right)$$

g) Besitzt f einen Wendepunkt / Sattelpunkt?
Suche jene x_0 mit $f''(x_0) = 0$ und wo zusätzlich f'' das Vorzeichen wechselt!

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{-10(x^2-6)}{x^5} &= 0 \\ -10(x^2-6) &= 0 \\ x^2 - 6 &= 0 \\ x^2 &= 6 \rightarrow x_5 = \sqrt{6},\ x_6 = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

Durch Kontrolle sehen wir, dass $f''(x)$ für $x < -\sqrt{6}$ und $x > \sqrt{6}$ negativ ist (z.B. $x = \pm 7$ einsetzen), während $f''(x)$ für $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$ positiv ist (z.B. $x = 0$ einsetzen). Das heisst, f'' wechselt bei $x_5 = \sqrt{6}$ und $x_6 = -\sqrt{6}$ das Vorzeichen und somit haben wir Wendepunkte gefunden.

gefundene x-Werte einsetzen:

$$WP_1 : \quad \left(\sqrt{6}, \frac{-25}{\sqrt{6}^3}\right)$$

$$WP_2 : \quad \left(-\sqrt{6}, \frac{25}{\sqrt{6}^3}\right)$$

h) Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$?

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2+5}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{5}{x}+\frac{5}{x^3}}{1} = \frac{-0+0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x^2+5}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{5}{x}+\frac{5}{x^3}}{1} = \frac{0-0}{1} = 0$$

$\Rightarrow$ die x-Achse ist somit eine horizontale Asymptote.

i) Welche y-Werte werden erreicht?
Bemerkung: bei $x = 0$ liegt eine Polstelle vor:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{-5x^2 + 5}{x^3} = \frac{5}{\to 0^+} = \infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-5x^2 + 5}{x^3} = \frac{5}{\to 0^-} = -\infty$$

$\Rightarrow \boxed{W = \mathbb{R}}$
(verwende hier auch Kenntnis von Lage der lokalen Extrema)

j) Skizze

Tangentenverfahren von Newton

- Gegeben: $f(x)$
- Ziel: Finde eine Nullstelle der Funktion f
- Idee:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Newtonverfahren

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \in \mathbb{N}}$$

Anmerkung

- Für genügend grosse n nähert sich x_{n+1} beliebig nahe der Nullstelle.

Beispiel

- Suche Lösung von $e^x = 2$, d.h. Nullstelle von $f(x) = e^x - 2$ ($\Rightarrow x = \ln 2 \approx 0.693147181\ldots$)
    1. $x_0 = 1$
    2. $f(x) = e^x - 2$
    3. $f'(x) = e^x$
    4. Newtonverfahren:
       $x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 2}{e^{x_n}} = x_n - (1 - 2e^{-x_n})$
       $x_1 = 1 - (1 - 2e^{-1}) = \frac{2}{e} \approx 0.73575\ldots$
       $x_2 = x_1 - (1 - 2e^{-x_1}) \approx 0.6940423\ldots$
       $x_3 = x_2 - (1 - 2e^{-x_2}) \approx 0.693147581\ldots$

Wann funktioniert das Newtonverfahren gut?

- Mathematische Bedingung:

$$\frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \in (-1, 1)$$

  Funktioniert gut wenn:

  - f klein
  - f' gross (Steigung gross)
  - f'' klein (Krümmung klein)

- **Anmerkung zum Newtonverfahren:**
  Man findet immer nur eine lokale Nullstelle, nicht alle Nullstellen der Funktionen.