Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 5: Integralrechnung

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

5. Integralrechnung

- Grundbegriffe
- Das bestimmte Integral als Flächeninhalt
- Der Fundamentalsatz
- Partielle Integration
- Integration durch Substitution
- Uneigentliche Integrale
- Integration von Partialbrüchen
- Volumen eines Rotationskörpers

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 422 - 475, 487 - 495**
  Seiten 559 - 565 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Definition Stammfunktion

Gegeben Funktion f mit Definitionsbereich $D = [a, b]$.
Eine Funktion F mit Definitionsbereich $[a, b]$ heisst Stammfunktion für die Funktion f falls:

- F ableitbar ist **und**
- $F'(x) = f(x) \quad$ für alle $x \in [a, b]$

Beispiele

- $f(x) = x^{\alpha}$ wobei $\alpha \neq -1$

  $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ ist eine Stammfunktion für f

- $x > 0, f(x) = \frac{1}{x}$

  $\Rightarrow F(x) = \ln(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$, ist eine Stammfunktion für f

Bemerkung

- Seien F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1(x) - F_2(x) = c$.

Anwendung

- Bei der Suche nach einer Stammfunktion reicht es eine einzige zu finden, nennen wir diese F.
- Dann folgt: Jede Stammfunktion hat die Form $F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Notation und Terminologie

$\int f(x)dx = \{F(x) + c \; : \; c \in \mathbb{R}\}$
$\int f(x)dx = \textit{unbestimmtes Integral von } f$

Beispiel

$f(x) = \cos x$
$\Rightarrow \int f(x)\, dx = \int \cos x \, dx = \{\sin x + c \; : \; c \in \mathbb{R}\}$

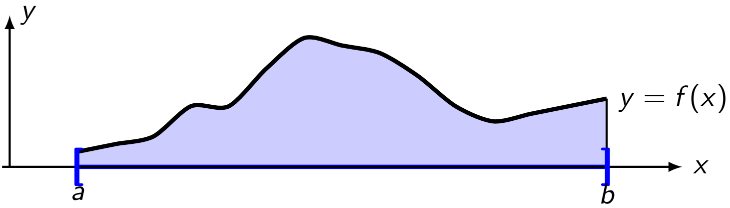
Theorem

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion (also unendlich viele)!

Das bestimmte Integral und Flächeninhalte

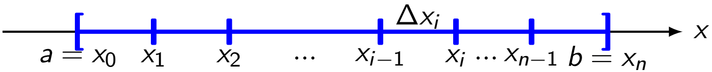
Das bestimmte Integral der *stetigen* Funktion f von a bis b wird *definiert* als die Fläche unter dem Graphen:

$$\int_a^b f(x)dx := \textit{Fläche unter dem Graphen}$$

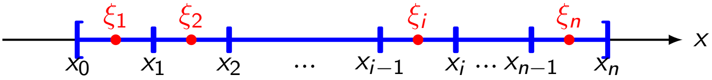


Mathematisch wird das bestimmte Integral wie folgt definiert:

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig
- Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:
  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$

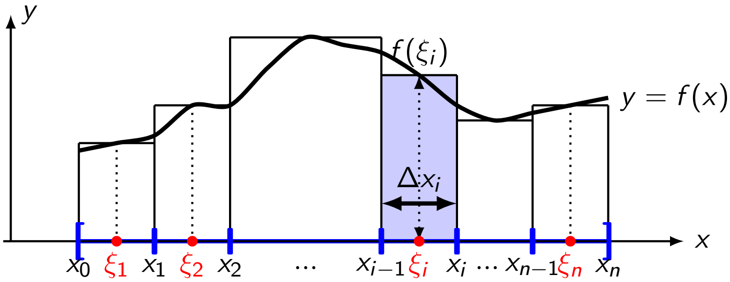


- Wahl eines Zwischenpunktes ξ_i in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$:



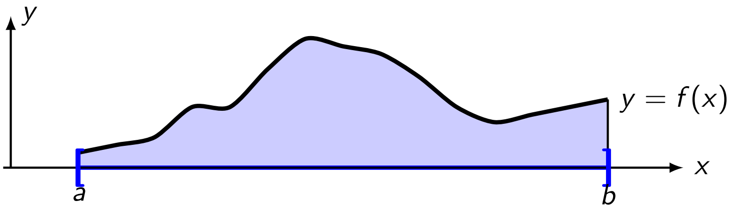
- Bilden der **Riemannschen Summe**

$$F_{n,\triangle} := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



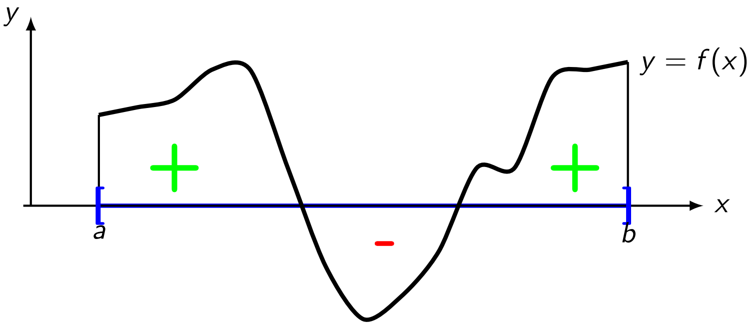
- Dann ist das Integral der Funktion f von a bis b:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \triangleq \quad \textit{Fläche unter dem Graphen}$$



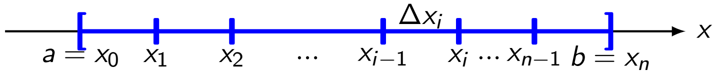
Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

Flächenteile unterhalb der x-Achse werden als negativ gezählt!



Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

- $a < b$; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
- $n \in \mathbb{N}$
- Zerlegung von $[a, b]$ in n **gleich lange** Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$; $(i = 1, 2, ..., n)$



- $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $\qquad x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$

Zugehörige Riemannsche Summe (wähle $\xi_i = x_i =$ rechter Endpunkt des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$):

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\frac{b-a}{n} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$$

Verbindung zwischen das bestimmte Integral und Stammfunktionen

Kernaussage dieses Abschnittes wird folgende sein:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei f eine stetige Funktion auf diesem Intervall. Dann gelten:

a) f hat eine Stammfunktion.

b) Ist F eine Stammfunktion von f und sind $a, b \in I$, so ist:

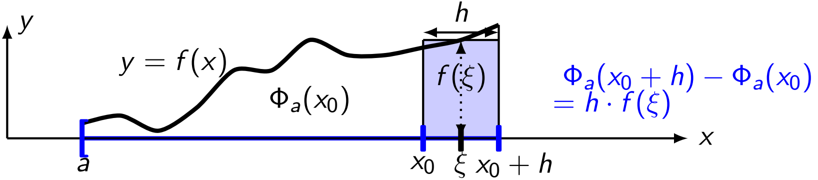
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Wie kommt man dazu?

Der Fundamentalsatz

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall ; $a \in I$; $f : I \to \mathbb{R}$ stetig
- Neue Funktion $\Phi = \Phi_a : I \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \Phi_a(x) = \int_a^x f(t)dt$
  "Jedem x in I ordnen wir die Fläche unter dem Graphen von f zwischen a und x zu."
- $x_0, x_0 + h \in I$, mit $x_0 \leq \xi = \xi(h) \leq x_0 + h$

$$\begin{aligned}\Phi_a(x_0+h) - \Phi_a(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = h \cdot f(\xi(h))\end{aligned}$$



- Bilden wir den Grenzwert, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\Phi_a(x_0+h)-\Phi_a(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f(\xi(h))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} f(\xi(h)) = f(x_0)\end{aligned}$$

- Somit gilt:

$$\Phi_a(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{ist differenzierbar und}$$

$$\Phi_a{}'(x) = f(x) \quad (\text{für alle } x \in I)$$

Der Fundamentalsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei f auf I eine stetige Funktion. Dann gelten:

a) f hat eine Stammfunktion.

b) Ist F eine Stammfunktion von f und sind $a, b \in I$, so ist:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notation

$$F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b \implies \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

Beispiel

Gesucht: $\int_0^b \sin x \, dx$

Wir wissen: Die Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^b \sin x \, dx &= -\cos(x)\big|_0^b = -\cos(b) - (-\cos(0)) \\ &= 1 - \cos(b)\end{aligned}$$

Satz (Bestimmung der Stammfunktion)

1) $\int x^\alpha \, dx = \left\{ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,;\; C \in \mathbb{R} \right\}$ (falls $\alpha \neq -1$)

2) $\int \frac{1}{x} \, dx = \{\ln|x| + C\,;\; C \in \mathbb{R}\}$

3) $\int \cos x \;\, dx = \{\sin x + C\,;\; C \in \mathbb{R}\}$

4) $\int \sin x \;\, dx = \{-\cos x + C\,;\; C \in \mathbb{R}\}$

5) Ist F Stammfunktion für f und ist G Stammfunktion für g, dann ist $F \pm G$ Stammfunktion für $f \pm g$

$$\Rightarrow \int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

6) Ist F Stammfunktion für $f; \lambda \in \mathbb{R}$, dann ist λF Stammfunktion für λf

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

Beispiel:

$$\int (x^2 + \cos x)\, dx = \int x^2\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + C_1 + \sin x + C_2 = \frac{x^3}{3} + \sin x + C$$

Satz (partielle Integration):

a)

$$\boxed{\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx}$$

(Interpretation:
Stammfunktion von $u \cdot v' = u \cdot v$ - Stammfunktion von $u' \cdot v$)

b)

$$\boxed{\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \mid_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

Bemerkung: Erfahrung ist gewünscht bei der Wahl der Funktionen u und v.

Beispiel

$$\int_1^e x^2 \ln x \; dx$$

Wir wollen partielle Integration verwenden und definieren passende u und v

1. Wahl:
   $u(x) = x^2 \quad v'(x) = \ln x$
   $u'(x) = 2x \quad v(x) = ?$
   $\Rightarrow$ recht schwierig, nicht optimal

2. Wahl:
   $u(x) = \ln x \quad v'(x) = x^2$
   $u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = \frac{x^3}{3}$

Jetzt integrieren wir

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \; dx &= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3}\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3}\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C\end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$
ist eine Stammfunktion für $x^2 \ln x$.

Es gibt zwei Wege, das folgende bestimmte Integral zu lösen

$$\int_1^e x^2 \ln x \; dx$$

1. Lösung mit Satz zur partiellen Integration (Teil b))
2. Lösung mittels der im Teil a) bestimmten Stammfunktion

1. Lösung mit Satz zur partiellen Integration (Teil b)

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^2 \ln x dx &= \ln x \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3}\, dx \\
&= \left(\ln e \cdot \frac{e^3}{3} - \ln 1 \cdot \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\int_1^e \frac{x^2}{1} dx \\
&= \left(\frac{e^3}{3} - 0 \cdot \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^e \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}\left(e^3 - 1^3\right) = \underline{\underline{\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}}}
\end{aligned}$$

2. Lösung mittels der im Teil a) bestimmten Stammfunktion:

$$\int_1^e x^2 \ln x \; dx = F(x)\Big|_1^e$$

mit F Stammfunktion von $x^2 \ln x$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$$

$$\Rightarrow \int_1^e x^2 \ln x \; dx = \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^e$$

$$= \left(\frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{9} e^3\right) - \left(\frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1^3}{9}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}}}$$

Bemerkung: Manchmal ist $v'(x)$ *nicht sichtbar*!

Beispiel 2:

$$\int \ln x \; dx = \int (\ln x) \cdot 1 \; dx$$

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \ln x \cdot 1 \; dx &= (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \; dx \\ &= x \ln x - \int 1 \; dx \\ &= \underline{\underline{x \ln x - x + C}} \end{aligned}$$

Bemerkung

- Ziel der partiellen Integration ist die Vereinfachung des bestimmten / unbestimmten Integrals.
- Manchmal muss man zweimal oder dreimal integrieren.

Beispiel 3:

$$\int x^2 \cos x \; dx$$

$u(x) = x^2 \quad v'(x) = \cos x$
$u'(x) = 2x \quad v(x) = \sin x$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos x \; dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \; dx = x^2 \sin x - 2 \cdot \int x \sin x \; dx$$

Jetzt integrieren wir $\displaystyle\int x \sin x \; dx$:

$u(x) = x \quad v'(x) = \sin x$
$u'(x) = 1 \quad v(x) = -\cos x$

$$\Rightarrow \int x \sin x \; dx = -x \cos x - \int -\cos x \; dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Auflösen

$$\Rightarrow \int x^2 \cos x \; dx = x^2 \sin x - 2(-x \;\cos x + \sin x + C)$$
$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

Bemerkung:

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \; dx = \left.(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x)\right|_0^\pi$$
$$= (\pi^2 \sin \pi + 2\pi \cos \pi - 2 \sin \pi)$$
$$- (0^2 \sin 0 + 2 \cdot 0 \cdot \cos 0 - 2 \sin 0)$$
$$= \underline{\underline{-2\pi}}$$

Beispiel (Substitution)

$$\boxed{\int x\cos(x^2)\ dx}$$

- Partielle Integration ist schwierig ($\to x^2$)
- <u>Substitution:</u> $x^2 = u$ und somit $2x\ dx = du$
- Somit:

$$\int x\cos(x^2)\ dx = \int \frac{1}{2}\cos(x^2)\cdot(2x\ dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos u \cdot du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin x^2 + C = F(x)$$

Rezept / Technik

- Bestimmen Sie $u = g(x)$
- $du = g'(x)\ dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{g'(x)} du$
- $\int f(x)dx \rightsquigarrow \int \varphi(u)du$
- Rücksubstitution $u = g(x)$

Bemerkung

- Hoffnung: $\int \varphi(u)du$ ist einfacher
- $\int_a^b f(x)dx \rightarrow$(Substitution $u = g(x)$) $\int_{g(a)}^{g(b)} \varphi(u)du$

Beispiel 2

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \text{für} \quad x \in (0,1)$$

- **1. Versuch: geeignete partielle Integration**
- **2. Versuch: Substitution**

$$x = \sin u \Leftrightarrow \arcsin x = u$$

$$\rightarrow 1 - x^2 = 1 - (\sin u)^2 = (\cos u)^2$$

$$(dx = \cos(u)du)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin u}{\sqrt{(\cos u)^2}}dx = \int \frac{\sin u}{\cos u} \cdot \underbrace{\cos u \ du}_{dx}$$

$$= \int \sin u \ du = -\cos u + C = \underline{\underline{-\cos(\arcsin x) + C}}$$

Empfehlungen für Substitutionen:

1)

$$\int f(ax+b)dx \rightarrow u = ax+b$$

$$du = a\ dx$$

Beispiel 1

$$\int (2x-3)^{11} dx \quad u = 2x-3$$

$$du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int u^{11} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{11} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{12}}{12} + C = \frac{u^{12}}{24} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{(2x-3)^{12}}{24} + C}}$$

Beispiel 2

$$\int \sqrt{4x+5}dx \quad u = 4x+5$$

$$du = 4dx \quad dx = \frac{du}{4}$$

$$\int \sqrt{u}\ \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\ du = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{1}{6}(4x+5)^{\frac{3}{2}} + C}}$$

Beispiel 3

$$\int e^{5x+2016} dx \quad u = 5x + 2016$$

$$du = 5dx \quad dx = \frac{du}{5}$$

$$\int e^u \, \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int e^u \, du = \frac{1}{5} \cdot e^u + C = \underline{\underline{\frac{1}{5} e^{5x+2016} + C}}$$

Empfehlungen für Substitutionen

2)

$$\int f(x) \cdot f'(x)dx \rightarrow u = f(x)$$

$$du = f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int u \; du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}f(x)^2 + C$$

Beispiel 1

$$\int \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{f'} \; dx \qquad u = \sin x$$

$$du = \cos \; dx$$

$$\Rightarrow \int u \; du = \frac{1}{2}u^2 + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\sin x)^2 + C}}$$

Beispiel 2

$$\int \frac{\ln x}{x}\ dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\ dx = \int \ln x \cdot (\ln x)'\ dx \qquad u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int u\ du = \frac{1}{2}u^2 + C = \underline{\underline{\frac{(\ln x)^2}{2} + C}}$$

Empfehlungen für Substitutionen:

3)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\ dx \qquad u = f(x)$$

$$du = f'(x)dx$$

$$\int \frac{1}{u}\ du = \ln|u| + C$$

Beispiel 1

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\, dx \qquad u = x^2 - 3x + 1$$

$$du = (2x-3)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln\left|x^2 - 3x + 1\right| + C$$

Beispiel 2

$$\int \frac{e^x}{e^x+5}\,dx \qquad u = e^x + 5$$

$$du = e^x\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|e^x+5| + C = \ln(e^x+5) + C$$

Empfehlungen für Substitutionen

4) $r > 0$ fest vorgegeben, $|x| \leq r$

Erinnerung: $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$ für alle y

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \qquad x = r \sin u$$

$$dx = r \cos u \; du$$

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2 (\sin u)^2} = \sqrt{r^2 (1 - (\sin u)^2)}$$
$$= r \cdot \sqrt{1 - (\sin u)^2} = r \sqrt{(\cos u)^2} = r |\cos u| = r \cos u$$

(weil hier $u = \arcsin(\frac{x}{r}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos(u) \geq 0$).

Integration durch Substitution

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\; dx = \int (r \cos u) \cdot r \cos u \;\, du$$

$$= r^2 \underbrace{\int \overbrace{\cos u}^{f} \cdot \overbrace{\cos u}^{g'} \;\, du}_{J}$$

$\Rightarrow$ Partielle Integration mit $f'(u) = -\sin u, \quad g(u) = \sin u$

$$J = \int \cos u \cdot \cos u \; du = \cos u \cdot \sin u - \int (-\sin u \cdot \sin u) \; du$$

$$= \cos u \cdot \sin u + \int (\sin u)^2 \; du = \cos u \cdot \sin u + \int (1 - (\cos u)^2) \; du$$

$$= \cos u \cdot \sin u + u - \underbrace{\int (\cos u)^2 \; du}_{J}$$

$$\Rightarrow J = \cos u \cdot \sin u + u - J$$

$$J = \frac{1}{2}(\cos u \cdot \sin u + u)$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{r^2 - x^2} \; dx = \frac{1}{2} r^2 (\cos u \cdot \sin u + u), \; u = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$$

Empfehlungen für Substitutionen:

5)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\,dx \qquad x = 5\cdot\cosh(u) = 5\cdot\frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$$

Notation:

$$\cosh(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$$

$$\sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$$

$$\Rightarrow \cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$$

$$\sqrt{x^2-25} = \sqrt{5^2\cosh^2(u)-5^2} = \sqrt{5^2(\cosh^2(u)-1)}$$
$$= 5\cdot\sqrt{\cosh^2(u)-1} = 5\cdot\sqrt{\sinh^2(u)} = 5\cdot\sinh(u)$$

$$dx = 5\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})\ du = 5\cdot\sinh(u)\ du$$

$$\Rightarrow \int \frac{5\cosh(u)}{5\sinh(u)}\cdot 5\sinh(u)\ du = 5\int\cosh(u)\ du$$
$$= 5\int\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})du = \frac{5}{2}(e^u-e^{-u})+C$$
$$= 5\sinh(\operatorname{arcosh}(x/5))+C = 5\sqrt{(x/5)^2-1}+C = \sqrt{x^2-25}+C$$

Integration durch Substitution

$$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\; dx$$

$$\rightsquigarrow x = a \cdot \cosh(u)$$

$$\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})\; dx$$

$$\rightsquigarrow x = a \cdot \sinh(u)$$

Bisher

- entweder

$$\int f(x)\ dx \qquad \text{(alle Stammfunktionen für } f\text{; unbestimmte Integrale)}$$

- oder

$$\int_a^b f(x)\ dx \qquad \text{(Zahl, Fläche unter der Kurve zwischen } a \text{ und } b\text{)}$$

Definition

$$\int_a^\infty f(x)\,dx;\ \int_\infty^b f(x)\,dx;\ \int_\infty^\infty f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ uneigentliche Integrale

Berechnung des Integrals $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ wird wie folgt behandelt:

1) wähle $\lambda \geq a$ und berechne $\displaystyle\int_a^\lambda f(x)\,dx$

2) berechne $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^\lambda f(x)\,dx$, das ist dann $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$

Beispiel 1

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad I = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

Lösung: sei $\lambda \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^\lambda f(x)\,dx = \int_0^\lambda \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan\Big|_0^\lambda$$

$$= \arctan\lambda - \arctan 0 = \arctan\lambda$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \arctan\lambda = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Geometrische Interpretation
Der Flächeninhalt zwischen $f(x)$ und x-Achse ist endlich und gleich $\frac{\pi}{2}$.

Definition

Falls $\int_a^{\infty} f(x)\,dx < \infty,$ so heisst das uneigentliche Integral konvergent (sonst divergent).

Bemerkungen:

1. Für $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ wähle $\lambda < b,$ berechne $\int_{\lambda}^{b} f(x)\,dx$ und anschliessend $\lim_{\lambda \to -\infty} \int_{\lambda}^{b} f(x)\,dx$

2. Zur Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx :$ wähle $C \in \mathbb{R}$ und berechne $\int_{-\infty}^{C} f(x)\,dx$ und $\int_{C}^{\infty} f(x)\,dx$

Beispiel 1

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx$$

Lösung:

$$\lambda \geq 1 \to \int_1^\lambda \frac{1}{x^3} dx = \int_1^\lambda x^{-3} dx = -\frac{x^{-2}}{2}\bigg|_1^\lambda$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lambda^{-2} - 1^{-2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_1^\lambda \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Fazit: $I = \frac{1}{2}$; das heisst I ist konvergent.

Beispiel 2

$$f(x) = \sqrt{x} \quad I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} dx$$

Lösung

$$\lambda \geq 0 \to \int_0^{\lambda} \sqrt{x} dx = \int_0^{\lambda} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\lambda}$$
$$= \frac{2}{3} \left(\lambda^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \lambda^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\lambda} \sqrt{x} dx = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{3}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{+\infty}}$$

Fazit: I ist divergent, Fläche unter $\sqrt{x}$ ist unendlich.

Beispiel 3

Beweisen Sie: $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ ist konvergent } \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

Lösung: Sei zunächst $\alpha \neq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_1^\lambda \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\int_1^\lambda x^{-\alpha}dx\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{1}{-\alpha+1}\cdot x^{-\alpha+1}\right]\Bigg|_1^\lambda = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left[\lambda^{1-\alpha}-1^{1-\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\lambda\to\infty}\left[\lambda^{1-\alpha}-1\right] = \begin{cases} <\infty; & \text{falls } \alpha > 1 \\ +\infty; & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases}$$

Spezialfall $\alpha = 1$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_1^{\lambda} x^{-\alpha} dx = \lim_{\lambda \to \infty} \ln x \Big|_1^{\lambda} = \lim_{\lambda \to \infty} [\ln \lambda - \ln 1]$$
$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ konvergent genau dann wenn $\alpha > 1$

Bemerkung 1

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^{\beta}}\,dx = \int x^{-\beta}\,dx = \frac{1}{-\beta+1}\cdot x^{-\beta+1} + C \quad (\text{falls } \beta \neq 1)$$

Bemerkung 1'
Sei $a \in \mathbb{R}$ fest

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx \qquad u = x - a$$

$$du = dx$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|x-a| + C$$

Bemerkung 1'(Forts.)
Sei $a \in \mathbb{R}$ fest

$$\int \frac{1}{(x-a)^\beta}\,dx \qquad (\text{mit } \beta \neq -1) \quad u = x - a$$

$$du = dx$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^\beta}\,dx = \int \frac{1}{u^\beta}\,du = \frac{1}{-\beta+1} \cdot u^{-\beta+1} + C$$
$$= \frac{1}{-\beta+1} \cdot (x-a)^{-\beta+1} + C$$

Beispiel zu Bemerkung 1':

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3| + C$$
$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{-2+1}(x-2)^{-2+1} + C = -\frac{1}{(x-2)} + C$$

Definition

Echt gebrochene rationale Funktionen sind Funktionen der Form

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad P, Q \text{ sind Polynome}$$

$P(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, Grad $P = k$
$Q(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0$, Grad $Q = m$

$$\text{wobei } \boxed{k < m}$$

Beispiele

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^3+3x+2}$$

Ziel: Stammfunktionen für gebrochene rationale Funktionen finden

Bemerkung:

falls $Q(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a \neq 0$

Nullstellen von $Q(x)$ sind $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- falls: $\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ es gibt zwei reelle Lösungen x_1, x_2 von $Q(x) = 0$ und wir können schreiben $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
  Beispiel:

$$x^2 - 3x + 2 = 1 \cdot (x - 1)(x - 2)$$

- falls:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$\Rightarrow Q$ hat eine doppelte Nullstelle

$$Q(x) = a(x - x_1)^2$$

Beispiel:

$$Q(x) = x^2 - 4x + 4$$
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$Q(x) = (x - 2)^2$$

Stammfunktionen für gebrochene rationale Funktionen

- Beispiele (werden in der Vorlesung vorgestellt)

- falls:

  $\Delta < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0$

  $\Rightarrow Q$ hat keine reellen Nullstellen (hat zwei komplexe Nullstellen)

  Beispiel:

$$Q(x) = x^2 + x + 3$$

Volumen eines Rotationskörpers

- Volumen dV=Grundfläche $\cdot$ Höhe $= \pi \cdot f^2(x) \cdot dx$
- $$V = \int dV = \int_a^b \pi f^2(x)\ dx = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx$$
- Der Graph f rotiert um die x-Achse
  Querschnittsfläche an der Stelle $x : \pi f^2(x) = F(x)$

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$V = \pi \int_1^b \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^b x^{-2} dx = \pi \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_1^b$$

$$= -\pi \left(\frac{1}{b} - 1\right) = \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

$$\lim_{b \to \infty} \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \underline{\underline{\pi}}$$