Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 8: Lineare Algebra
8.1 Reelle Matrizen

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

8. Lineare Algebra: 1. Reelle Matrizen

- Grundbegriffe
  - Definition einer reellen Matrix
  - Transponierte einer Matrix
- Spezielle quadratische Matrizen
  - Diagonalmatrix und Einheitsmatrix
  - Dreiecksmatrix
  - Symmetrische Matrix
  - Schiefsymmetrische Matrix
- Gleichheit von Matrizen
- Rechnenoperationen für Matrizen
  - Addition und Substraktion von Matrizen
  - Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar
  - Multiplikation von Matrizen

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 5 - 23,**
  Seiten 147 - 148 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Definition einer reellen Matrix

Definition

Unter einer reellen Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) versteht man ein aus $m \cdot n$ *reellen* Zahlen bestehendes rechteckiges Schema mit m waagerecht angeordneten Zeilen und n senkrecht angeordneten Spalten:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{k-te Spalte} \end{array} & \end{array}$$

Definition einer reellen Matrix: Anmerkungen (1/2)

Anmerkungen

- Wir führen weitere Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{ll} a_{ik}: & \textit{Matrixelemente } (i = 1, 2, .., m; k = 1, 2, .., n) \\ i: & \textit{Zeilenindex} \\ k: & \textit{Spaltenindex} \\ m: & \text{Anzahl der Zeilen (Zeilenzahl)} \\ n: & \text{Anzahl der Spalten (Spaltenzahl)} \end{array}$$

- Eine reelle Matrix ist ein *geordnetes Zahlenschema* aus reellen Zahlen und besitzt *keinen* Zahlenwert (im Gegensatz zu den später noch einzuführenden *Determinanten*)
- Gebräuchliche Schreibweisen für eine Matrix sind: $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_{(m,n)}$, $(a_{i,k})$, $(a_{i,k})_{(m,n)}$
- Eine Matrix vom Typ (m, n) wird auch kurz als (m, n)-Matrix bezeichnet.

Definition einer reellen Matrix: Anmerkungen (2/2)

- Der Platz, den ein Matrixelement a_{ik} innerhalb der Matrix $\mathbf{A}$ einnimmt, ist durch die beiden Indizes i und k *eindeutig* festgelegt (das Indexpaar (i, k) kann als *Platziffer* aufgefasst werden). Das Matrixelement a_{ik} befindet sich dabei in der i-ten Zeile und der *k-ten Spalte*:

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} & \leftarrow \text{i-te Zeile} \\
\uparrow & \\
\text{k-te Spalte} &
\end{array}$$

- *Sonderfall* $m = n$: die Matrix enthält *gleichviele* Zeilen und Spalten und wird daher als *n-reihige, quadratische* Matrix oder Matrix *n-ter Ordnung* bezeichnet.

Definition einer reellen Matrix: Beispiele

- Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  besitzt 2 Zeilen und 4 Spalten und ist daher vom Typ (2,4). Man hat $a_{21} = 2$ und $a_{13} = 5$.

- Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

  ist ein Beispiel für eine *3-reihige, quadratische* Matrix.

Spezielle Matrizen

- *Nullmatrix* **0**: Matrix, deren Elemente sämtlich *verschwinden* (alle Matrixelemente sind null)
- *Spaltenmatrix*: Matrix mit nur einer Spalte. Sie ist vom Typ $(m, 1)$ und besitzt die Form:

$$\mathbf{A}_{(m,1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

- *Zeilenmatrix*: Matrix mit nur einer Zeile. Sie ist vom Typ $(1, n)$ und besitzt die Form:

$$\mathbf{A}_{(1,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Zeilenvektoren und Spaltenvektoren (1/3)

Die Zeilen einer Matrix werden daher auch als *Zeilenvektoren*, die Spalten einer Matrix auch als *Spaltenvektoren* bezeichnet.
Eine (m, n)-Matrix enthählt genau m Zeilenvektoren und n Spaltenvektoren:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{cc} \leftarrow & a^1 \\ \leftarrow & a^2 \\ & \vdots \\ \leftarrow & a^i \\ & \vdots \\ \leftarrow & a^m \end{array}\right\} \text{Zeilenvektoren} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k & \ldots & a_n \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektoren}}$$

Zeilenvektoren und Spaltenvektoren (2/3)

- Zeilenvektor :

$$a^{i} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \ , \forall i = 1, 2, ..., m$$

- Spaltenvektor:

$$a_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \ , \forall k = 1, 2, ..., n$$

Zeilenvektoren und Spaltenvektoren (3/3)

Die (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ lässt sich dann wie folgt durch Zeilen- bzw. Spaltenvektoren beschreiben:

- $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{(Zeile aus n Spaltenvektoren)}$$

- $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \quad \text{(Spalte aus m Zeilenvektoren)}$$

Zeilenvektoren und Spaltenvektoren: Beispiele

Beispiele

- $$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ist eine *Nullmatrix* vom Typ $(2, 3)$.

- $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  A und **B** sind *Spaltenmatrizen*, d.h *Spaltenvektoren* mit den Dimensionen 4 bzw. 3.

Zeilenvektoren und Spaltenvektoren: Beispiele

Beispiel

- Die $(2,4)$-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

enthält *zwei* Zeilenvektoren, nämlich

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; a^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

und *vier* Spaltenvektoren, nämlich

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Transponierte einer Matrix

Definition

Werden in einer Matrix $\mathbf{A}$ Zeilen und Spalten miteinander vertauscht, so erhält man die *Transponierte* $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ der Matrix $\mathbf{A}$.

Anmerkungen

- Zwischen den Elementen a_{ik} einer Matrix $\mathbf{A}$ und den Elementen a_{ik}^T der *transponierten* Matrix $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ besteht der folgende Zusammenhang:

  $$a_{ik}^\mathsf{T} = a_{ki} \quad (\text{für alle } i \text{ und } k)$$

  (*Vertauschen* der beiden Indizes).
- Ist $\mathbf{A}$ eine Matrix vom Typ (m, n), so ist ihre Transponierte $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ vom Typ (n, m).
- Durch 2-*maliges Transponieren* erhält man wieder die Ausgangsmatrix, d.h. es gilt stets $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

Transponierte einer Matrix: Beispiele

- Wir *transponieren* die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und erhalten:

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Der *Spaltenvektor* $\mathbf{C}$ ist dabei in den *Zeilenvektor* $\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ überführt worden.

Quadratische Matrizen

Eine *n-reihige*, quadratische Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ besitzt die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Anmerkungen

- Die *Hauptdiagonale* einer quadratischen Matrix verlaüft von *links oben* nach *recht unten*. Sie verbindet die *Diagonalelemente* a_{ii}, $i = 1, 2, ..., n$ miteinander. Die *Nebendiagonale* verläuft von *rechts oben* nach *links unten*.
- *Transponieren* bedeutet bei einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$: *Spiegelung* der Elemente von $\mathbf{A}$ an der *Hauptdiagonalen*.

Diagonalmatrix

Definition

Eine *n-reihige, quadratische Matrix* $\mathbf{A} = (a_{ik})$ heißt *Diagonalmatrix*, wenn alle *ausserhalb* der Hauptdiagonalen liegenden Elemente verschwinden:

$$a_{ik} = 0 \qquad \text{für } i \neq k$$

Eine *n-reihige Diagonalmatrix* besitzt daher die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Definition

Eine n-reihige Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, .., n)$ heißt *n-reihige Einheitsmatrix* **E**.

Die *n-reihige Einheitsmatrix* besitzt also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrix (1/2)

Definition

Eine n-reihige, quadratische Matrix wird als *Dreiecksmatrix* bezeichnet, wenn alle Elemente ober- *oder* unterhalb der Hauptdiagonalen verschwinden.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1\ 1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{\cdot\cdot} & 0 \\ a_{n\ 1} & a_{n\ 2} & a_{n\ 3} & \cdots & a_{n\ n} \end{pmatrix}}_{\textit{Untere}\ \text{Dreiecksmatrix}}$$

Dreiecksmatrix (2/2)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ 0 & a_{2\,2} & \cdots & a_{n-1\,2} & a_{n\,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{\cdot\cdot} & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n\,n} \end{pmatrix}}_{\textit{Obere}\text{ Dreiecksmatrix}}$$

Anmerkungen

Für die Elemente einer *unteren* bzw. *oberen* Dreiecksmatrix gilt demnach:

- *Untere* Dreiecksmatrix: $a_{ik} = 0$ für $i < k$
- *Obere* Dreiecksmatrix: $a_{ik} = 0$ für $i > k$

Symmetrische Matrix

Definition

Eine n-reihige, quadratische Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$a_{ik} = a_{ki}$$

für alle i und k ist $(i, k = 1, 2, ..., n)$.

Anmerkung

- Bei einer *symmetrischen* Matrix sind die Elemente *spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen* angeordnet.
  Daher gilt für eine *symmetrische* Matrix $\mathbf{A}$ stets $\mathbf{A}^\mathbf{T} = \mathbf{A}$.

Beispiele

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Schiefsymmetrische Matrix

Definition

Eine n-reihige, quadratische Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ heißt *schiefsymmetrisch*, wenn

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

für alle i und k ist $(i, k = 1, 2, ..., n)$.

Anmerkungen

- Bei einer *schiefsymmetrischen* Matrix $\mathbf{A}$ verschwinden *sämtliche* Diagonalelemente: $a_{ii} = 0,\ i = 1, 2, .., n$.

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$$

- Eine *schiefsymmetrische* Matrix erfüllt die Bedingung $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$

Beispiel

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Gleichheit von Matrizen

Definition

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ vom gleichen Typ (m, n) heißen *gleich*, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, wenn

$$a_{ik} = b_{ik}$$

für alle i,k ist $(i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n)$.

Anmerkung

Gleiche Matrizen stimmen in ihrem Typ und in sämtlichen einander entsprechenden Elementen überein.

Beispiele

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ aber $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$ $(a_{22} \neq c_{22})$

Addition and Substraktion von Matrizen

Definition

Zum Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ vom *gleichen* Typ (m, n) werden *addiert* bzw. *substrahiert*, indem man die entsprechenden, d.h. *gleichstelligen* Matrixelemente *addiert* bzw. *substrahiert*.
Die Matrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (c_{ik}) \quad \text{mit} \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

heisst die *Summe* von **A** und **B**.
Die Matrix

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (d_{ik}) \quad \text{mit} \quad d_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$$

heisst die *Differenz* von **A** und **B** $(i = 1, 2..., m;\ k = 1, 2, ..., n)$.

Anmerkung

- *Addition* und *Substraktion* sind nur für Matrizen *gleichen* Typs erklärt.

Addition und Substraktion von Matrizen

Rechengesetze

- *Kommutativgesetz* $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
- *Assoziativgesetz* $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$

Beispiel

- $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
- Wir bilden die *Summe* $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ und die *Differenz* $\mathbf{D}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$ und erhalten:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} (1+5) & (5+1) & (-3+3) \\ (4-1) & (0+4) & (8+7) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} (1-5) & (5-1) & (-3-3) \\ (4+1) & (0-4) & (8-7) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 4 & -6 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Definition

Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ vom Typ (m, n) wird mit einem reellen Skalar (= reelle Zahl) λ *multipliziert*, indem man jedes Matrixelement a_{ik} mit dem Skalar λ multipliziert:

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik})$$

für alle i und k $(i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n)$.

Anmerkungen

- Die Matrix $\lambda \cdot \mathbf{A}$ ist das *Produkt* aus der Matrix $\mathbf{A}$ und dem Skalar λ.
- Der Multiplikationspunkt im Produkt $\lambda \cdot \mathbf{A}$ wird meist weggelassen: $\lambda \cdot \mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}$.

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Rechengesetze

λ und μ sind reelle Skalare, **A** und **B** Matrizen vom gleichen Typ:

- *Assoziativgesetz* $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$
- *Distributivgesetze* $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$
  $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$

Beispiel

- $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Wir berechnen die Matrix $\mathbf{B} = 4\mathbf{A}$:

  $$\mathbf{B} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -20 & 12 \\ 16 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

Definition

$\mathbf{A} = (a_{ik})$ sei eine Matrix vom Typ (m, n),
$\mathbf{B} = (b_{ik})$ eine Matrix vom Typ (n, p). Dann heisst die Matrix

$$C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ik})$$

mit

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + ... + a_{in} b_{nk} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

das *Produkt* der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ $(i = 1, 2, ..., m \; ; \; k = 1, 2, ..., p)$.

Anmerkungen

- Das Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist vom Typ (m, p).
- Der Multiplikationspunkt im Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ wird meist weggelassen: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{AB}$.

k-ter Spaltenvektor

$\downarrow$

Matrix **B**

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{array}\right)$$

i-ter Zeilenvektor $\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccccc} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{c_{ik}} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{mp} \end{array}\right)$$

Matrix **A** Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

c_{ik}:*Skalarprodukt* aus dem i-ten Zeilenvektor von **A** und dem k-ten Spaltenvektor von **B**.

Multiplikation von Matrizen

Beispiel

- Wir berechnen das Produkt $\mathbf{C}$ der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 15 & 28 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplikation von Matrizen

Regeln für die Matrizenmultiplikation

Bei der *Multiplikation* zweier Matrizen **A** und **B** sind folgende Regeln zu beachten:

1. Die Produktbildung $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist nur möglich, wenn die *Spaltenzahl* von **A** mit der *Zeilenzahl* von **B** *übereinstimmt*.
2. Das Matrixelement c_{ik} ist das *skalare Produkt* aus dem i-ten Zeilenvektor von **A** und dem k-ten Spaltenvektor von **B**.

Rechengesetze

- *Assoziativgesetz* $\quad \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
- *Distributivgesetz* $\quad \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
  $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
- *Weitere Gesetze* $\quad (\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$
  $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}.$